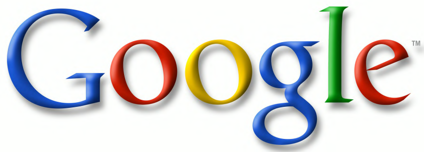
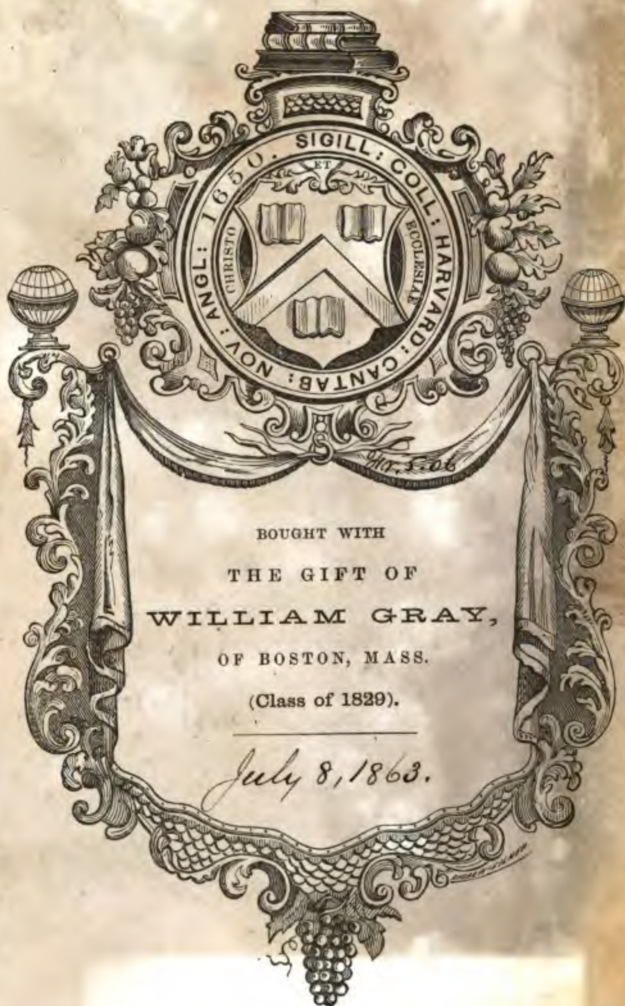



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
July 8, 1863.

LEÇONS

NOUVELLES

D'ARITHMÉTIQUE

PARIS. — IMPRIMÉ CHEZ BONAVENTURE ET DUCESSOIS,
55, quai des Grands-Augustins.

LEÇONS

NOUVELLES

D'ARITHMÉTIQUE

PAR

CHARLES BRIOT,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

TROISIÈME ÉDITION
revue et augmentée.



PARIS
DEZOBRY, E. MAGDELEINE ET Cᵉ, LIBRAIRES-ÉDITEURS
RUE DES ÉCOLES, 78,
Près du Musée de Cluny et de la Sorbonne.

1861

LEÇONS
D'ARITHMÉTIQUE

LIVRE I.

LES QUATRE OPÉRATIONS.

CHAPITRE I.

NUMÉRATION.

Définitions.

1. L'idée du *nombre* naît de la pluralité des objets considérés simultanément, ou de la répétition des phénomènes que nous observons.

Ainsi les arbres qui bordent une avenue nous donnent l'idée d'un *nombre;* un régiment se compose d'un certain *nombre* de soldats; la succession des jours, les battements d'une horloge forment des *nombres* de plus en plus grands.

On appelle *unité* l'objet ou le phénomène dont la répétition constitue le nombre.

On comprend aussi sous la dénomination de nombre l'unité seule, et l'on considère *un* comme le plus petit de tous les nombres.

L'*Arithmétique* est la science des nombres.

Formation des nombres.

2. Si, à côté d'un objet, on place un autre objet, on a l'idée d'un nombre que l'on nomme *deux*. Si, à côté de ces deux

objets, on en place encore un autre, on a l'idée d'un nouveau nombre que l'on nomme *trois*. En continuant de la sorte, on forme successivement les nombres *quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix*.

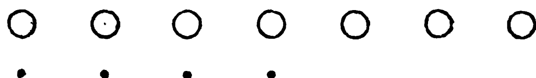
Si l'on ajoute ainsi sans cesse une unité nouvelle au dernier nombre obtenu, on forme la série croissante et indéfinie des nombres.

On a donné un nom particulier à chacun des dix premiers nombres. Ces noms sont : *un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix*.

On aurait pu continuer de la même manière, et donner un nom particulier à chacun des nombres suivants; mais il eût été impossible d'apprendre cette infinité de noms. On a donc cherché un moyen de nommer tous les nombres, à l'aide d'un petit nombre de mots; c'est le but de la numération parlée. Je vais exposer le système de numération universellement adopté, en n'employant d'abord que les mots strictement nécessaires; puis je ferai connaître les irrégularités que l'usage a introduites.

Numération parlée.

3. Je suppose, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de compter les noix contenues dans un sac. Je prends les noix une à une, en disant : une, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix; je forme ainsi un premier monceau de dix, ou une *dizaine*. Je recommence en disant : une, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix; je forme une seconde dizaine à côté de la première. Je recommence encore et je répète la même opération jusqu'à ce que j'aie vidé le sac; j'ai alors un certain nombre de dizaines rangées sur une même ligne et quelques noix restantes. On peut représenter la disposition des choses par la figure suivante :

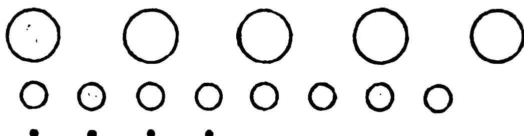


dans laquelle les points désignent les noix simples et les cercles

les dizaines. On dit alors que le nombre des noix contenues dans le sac est :

SEPT *dizaines* et QUATRE *unités.*

Supposons qu'il y ait plus de neuf dizaines. Je réunis les dix premières dizaines en un seul monceau, que j'appelle une *centaine;* je réunis les dix suivantes pour former une autre centaine, et ainsi de suite; j'ai alors un certain nombre de centaines, puis quelques dizaines et quelques noix restantes ainsi que le représente la figure suivante, dans laquelle les points désignent les noix simples, les petits cercles les dizaines, les grands les centaines.



On énonce le nombre des noix en disant :

CINQ *centaines,* HUIT *dizaines,* QUATRE *unités.*

S'il y avait plus de neuf centaines, on les réunirait dix par dix, d'une manière analogue, pour former des *mille,* et ainsi de suite.

Unités de différents ordres.

4. Notre procédé de numération consiste donc à former des collections de dix en dix fois plus grandes, qui s'appellent unités de différents ordres. Dix unités simples ou du premier ordre forment une dizaine ou une unité du second ordre; dix dizaines forment une centaine ou une unité du troisième ordre; dix centaines forment un mille ou une unité du quatrième ordre; en général, dix unités d'un certain ordre forment une unité de l'ordre suivant. Le tableau suivant contient les noms des unités des différents ordres.

Premier ordre.	— *Un.*	
Deuxième ordre.	— *Dix.*	1re classe.
Troisième ordre.	— *Cent.*	
Quatrième ordre.	— *Mille.*	
Cinquième ordre.	— *Dix mille.*	2e classe.
Sixième ordre.	— *Cent mille.*	
Septième ordre.	— *Un million.*	
Huitième ordre.	— *Dix millions.*	3e classe.
Neuvième ordre.	— *Cent milions.*	
Dixième ordre.	— *Un billion.*	
....	— *Dix billions.*	4e classe.
....	— *Cent billions.*	
....	— *Un trillion.*	
....	— *Dix trillions.*	5e classe.
....		

On lit ce tableau en disant : *un, dix, cent, mille*. On aurait pu donner un nom nouveau à chacun des ordres suivants ; mais, afin d'éviter un trop grand nombre de mots, on a conservé pour l'unité du cinquième ordre la dénomination *dix mille ;* l'unité du sixième ordre vaut dix fois dix mille ou *cent mille ;* on a conservé également cette dernière dénomination. Quant à l'unité du septième ordre, qui vaut dix fois cent mille ou mille mille, on lui a donné un nom nouveau *million.* Puis viennent la *dizaine de millions* et la *centaine de millions ;* l'unité suivante, qui vaut dix centaines de millions ou mille millions, a été appelée *billion* ou *milliard.*

De cette manière, les ordres ont été groupés en classes de trois en trois. Les unités simples, s'assemblant par dizaines et centaines, forment la première classe. Les mille s'assemblent, comme les unités simples, par dizaines et centaines, et forment la seconde classe. Les millions, s'assemblant de même par dizaines et centaines, forment la troisième classe, et ainsi de suite.

On voit que, par la formation des classes un mot nouveau seulement est nécessaire pour nommer le premier ordre de chaque classe; les deux autres se désignent à l'aide des mots

dix et *cent*. Je remarque aussi que les unités des classes successives sont de mille en mille fois plus grandes; ce sont: l'*unité simple*, le *mille*, le *million*, le *billion* (que l'on nomme aussi *milliard*), le *trillion*, le *quatrillion*, le *quintillion*, etc.

On appréciera tout l'avantage de ce système de numération en observant que tous les nombres, depuis un jusqu'à un milliard exclusivement, sont nommés au moyen de treize mots seulement.

5. Quand on a disposé, comme nous l'avons dit, les objets que l'on veut compter par collections de dix en dix fois plus grandes, pour énoncer le nombre des objets on dit combien il y a d'unités de chaque ordre (et il y en a au plus neuf), en commençant par l'ordre le plus élevé et descendant progressivement. On dira, par exemple : QUATRE *dizaines de millions*, SEPT *millions*, HUIT *centaines de mille*, SIX *dizaines de mille*, DEUX *mille*, NEUF *centaines*, TROIS *dizaines*, CINQ *unités*.

Irrégularités.

6. J'ai exposé le système de numération décimale dans sa perfection théorique, en n'employant que les mots strictement nécessaires; je vais maintenant faire connaître les modifications que l'usage a consacrées.

1° Les nombres deux dizaines, trois dizaines, quatre dizaines, cinq dizaines, six dizaines, sept dizaines, huit dizaines, neuf dizaines, ont été nommés : *vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, octante*, *nonante*.

L'usage a même introduit quelques irrégularités dans ces dénominations. Au lieu de septante, on dit habituellement *soixante-dix*, abréviation de soixante et dix; au lieu d'octante, on dit *quatre-vingts*, c'est-à-dire quatre fois vingt; au lieu de nonante, on dit *quatre-vingt-dix*, c'est-à-dire quatre-vingts plus dix.

2° Les nombres dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, portent les noms spéciaux : *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize*. Au delà commence la nomenclature régulière : dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt, vingt et un, vingt-deux, vingt-trois, etc.

Exemples.

Le nombre SIX *dizaines* et QUATRE *unités* s'énonce SOIXANTE-QUATRE.

Le nombre CINQ *centaines*, SIX *dizaines*, et QUATRE *unités* s'énonce CINQ CENT SOIXANTE-QUATRE.

Le nombre DEUX *mille*, TROIS *centaines*, CINQ *dizaines*, SEPT *unités*, s'énonce DEUX *mille* TROIS CENT QUARANTE-SEPT.

Le nombre QUATRE *dizaines de mille*, DEUX *mille*, TROIS *centaines*, CINQ *dizaines*, SEPT *unités*, s'énonce QUARANTE-DEUX *mille* TROIS CENT CINQUANTE-SEPT.

Le nombre HUIT *centaines de mille*, DEUX *dizaines de mille*, TROIS *mille*, CINQ *centaines*, TROIS *dizaines*, NEUF *unités*, s'énonce HUIT CENT VINGT-TROIS *mille* CINQ CENT TRENTE-NEUF.

Le nombre QUATRE *dizaines de millions*, SEPT *millions*, HUIT *centaines de mille*, SIX *dizaines de mille*, DEUX *mille*, NEUF *centaines*, TROIS *dizaines*, CINQ *unités*, s'énonce QUARANTE-SEPT *millions* HUIT CENT SOIXANTE-DEUX *mille* NEUF CENT TRENTE-CINQ.

Numération écrite.

7. Nous avons appris à *nommer* les nombres ; nous allons dire maintenant comment on les *écrit*. Supposons d'abord le nombre écrit au moyen de l'écriture ordinaire. Soit, par exemple, le nombre.

QUATRE $^{\text{diz. de mille}}$ DEUX ^{mille} TROIS ^{centaines} CINQ ^{dizaines} SEPT ^{unités}.

Si l'on remarque que les mots UN, DEUX, TROIS, QUATRE, CINQ, SIX, SEPT, HUIT, NEUF, qui indiquent le nombre des unités de chaque ordre se répètent sans cesse, il viendra naturellement à l'idée, afin d'abréger l'écriture, de représenter chacun de ces mots par un signe simple et facile à former. Les caractères ou chiffres que l'on a adoptés pour représenter les neuf premiers nombres sont :

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

A l'aide de ces caractères, le nombre précédent s'écrit :

4 $^{\text{diz. de mille}}$ 2 ^{mille} 3 $^{\text{cent.}}$ 5 $^{\text{diz.}}$ 7 ^{unités}.

Je remarque maintenant que le chiffre 7, qui est au premier rang à partir de la droite, représente des unités du premier ordre; le chiffre 5, qui est au second rang, représente des dizaines, c'est-à-dire des unités du second ordre; le chiffre 3, qui est au troisième rang, représente des centaines, c'est-à-dire des unités du troisième ordre; le chiffre 2, qui est au quatrième rang, représente des mille, c'est-à-dire des unités du quatrième ordre; le chiffre 4, qui est au cinquième rang, représente des dizaines de mille ou des unités du cinquième ordre. En un mot, le rang de chaque chiffre, à partir de la droite, indique l'ordre des unités qu'il représente. Il est donc inutile d'écrire le nom de l'ordre, le rang du chiffre l'indique suffisamment. De cette manière le nombre précédent s'écrit simplement

42357.

Considérons encore le nombre

4 diz. de millions 7 millions 8 cent. de mille 6 diz. de mille. 2 mille 9 cent. 3 diz. 5 unités.

Le rang de chaque chiffre, à partir de la droite, indiquant toujours l'ordre des unités, on écrira simplement

47862935.

8. Comme il arrive souvent que certains ordres d'unités manquent, on a imaginé un nouveau caractère, le chiffre 0, que l'on nomme *zéro*, et qui, n'ayant aucune valeur par lui-même, sert uniquement à remplir les places vacantes. Soit, par exemple, le nombre cinq cent sept, ou CINQ *centaines* et SEPT *unités*. Ce nombre ne contient pas de dizaines; on mettra un zéro pour marquer la place des dizaines, et l'on écrira

507.

De cette manière, le chiffre 5, qui représente des centaines ou des unités du troisième ordre, est toujours au troisième rang à partir de la droite. De même, le nombre SIX CENT DEUX *mille* CINQ, ou SIX *centaines de mille*, DEUX *mille*, CINQ *unités*, s'écrira

602005;

on a marqué par des zéros la place des unités qui manquent.

Cette manière d'écrire les nombres repose, comme on le voit, sur deux idées : 1° invention de neuf caractères ou chiffres servant à désigner les neuf premiers nombres : 2° indication de l'ordre des unités par le rang qu'occupe le chiffre à partir de la droite.

On a coutume d'exprimer cette seconde convention en disant qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes.

Règles.

9. De ce qui précède, on conclut les deux règles pratiques suivantes :

Règle I. *Pour écrire en chiffres un nombre énoncé en langage ordinaire, on place successivement à la suite les uns des autres, en allant de gauche à droite, les chiffres qui expriment les nombres de centaines, de dizaines et d'unités de chaque classe, en commençant par la classe la plus élevée et descendant progressivement, et marquant par des zéros la place des unités qui manquent.*

Règle II. *Pour énoncer en langage ordinaire un nombre écrit en chiffres, si le nombre n'a que trois chiffres au plus, on énonce successivement chaque chiffre à partir de la gauche, en indiquant immédiatement après l'ordre des unités.* Ainsi les nombres

38, 60, 837, 240, 601, 700,

s'énoncent :

TRENTE-HUIT, SOIXANTE, HUIT CENT TRENTE-SEPT, DEUX CENT QUARANTE, SIX CENT UN, SEPT CENTS.

Lorsque le nombre donné a plus de trois chiffres, on l'imagine partagé en tranches de trois chiffres à partir de la droite, sauf à n'en laisser qu'un ou deux dans la dernière tranche ; puis, commençant par la gauche, on énonce successivement chaque tranche, comme si elle était seule, en indiquant après le nom de la classe.

Soit le nombre

25347.

Les trois premiers chiffres 7, 4, 3, de droite à gauche, se rapportent à la classe des unités; les deux suivants à celle des mille. On dira donc: VINGT-CINQ *mille* TROIS CENT QUARANTE-SEPT.

Soit, de même, le nombre

4637521.

Les trois premiers chiffres, de droite à gauche, se rapportent à la classe des unités, les trois suivants à celle des mille, le dernier à celle des millions. On dira donc QUATRE *millions* SIX CENT TRENTE-SEPT *mille* CINQ CENT VINGT ET UN.

Soit encore le nombre

1070000304.

La classe des mille manque complétement. On dira: UN *billion* SOIXANTE-DIX *millions*, TROIS CENT QUATRE.

Exercices.

1° Le professeur donnera aux élèves des sacs de graines; les élèves disposeront les graines par collections de dix en dix fois plus grandes; ils diront les nombres et les écriront en chiffres.

2° Lire les nombres suivants :

42, 71, 99, 152, 207, 101, 999, 200, 1267, 2075, 2060, 5000, 41274, 235628, 10020, 100000, 1050003.

L'élève dira d'abord la signification de chaque chiffre en allant de droite à gauche; puis il lira le nombre.

3° Lire les nombres suivants :

245187236—4062007—100000400—3000000000—70541009000.

4° Écrire en chiffres les nombres suivants :

Vingt-cinq, vingt, dix, douze, octante, quatre-vingts, soixante, nonante-neuf, soixante-quinze, quatre-vingt-dix-sept, deux cent quarante-six, cent, cent un, huit cent cin-

quante, neuf cent neuf, mille quatre cent trente-huit, trois mille neuf cent soixante, cinq mille dix, quatre cent mille deux cents, neuf cent mille, neuf cent huit mille sept, trois millions quatre cent cinquante-deux mille neuf cent cinquante-sept, cent millions vingt mille trois, un billion vingt.

CHAPITRE II.

ADDITION.

Définition.

10. *L'addition est une opération qui a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul.* Le résultat s'appelle *somme* ou *total.*

On a plusieurs monceaux de noix; si on les réunit en un seul, on fait une addition. On connaît les nombres de noix que renferment les différents monceaux; il s'agit de calculer combien de noix renferme le monceau total.

Je vais examiner différents cas, en commençant par les plus simples.

Addition de deux nombres d'un chiffre.

11. Je veux, par exemple, additionner les nombres 4 et 5. Il est évident que j'arriverai au résultat en ajoutant au nombre 5 chacune des unités qui composent le nombre 4. Je suppose une main fermée, et partant de 5, j'ajoute successivement l'unité, en ouvrant un doigt à chaque unité ajoutée; quand j'aurai ouvert quatre doigts, je m'arrêterai. Partant de cinq, je dis donc : six, sept, huit, neuf; j'ai ouvert quatre doigts, la somme est 9.

Soit encore à ajouter 8 et 9. Je ferme les deux mains, et, partant de 9, j'ouvre les doigts successivement, en disant :

dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept. J'ai ouvert 8 doigts, je m'arrête, la somme est 17.

A force d'habitude et la mémoire aidant, on finit par dire tout d'un coup

5 et 4 font 9,
9 et 8 font 17;

et, pour abréger encore, en sous-entendant le mot *font*

5 et 4...... 9,
9 et 8...... 17.

On pourrait suivre ce procédé élémentaire pour faire l'addition de deux nombres quelconques, en ajoutant successivement à l'un d'eux chacune des unités qui composent l'autre; mais l'opération deviendrait fort longue si les nombres donnés étaient considérables. Je vais indiquer le procédé au moyen duquel on abrége l'opération.

Addition d'un nombre d'un chiffre à un nombre de plusieurs chiffres.

12. Ajouter 3 à 54. Puisque trois unités ajoutées à quatre unités donnent sept unités, la somme est 57.

Ajouter 8 à 37. Huit et sept font 15 unités, c'est-à-dire cinq unités et une dizaine; cette dizaine ajoutée aux trois dizaines donne quatre dizaines; la somme, se composant de quatre dizaines et de cinq unités, est 45.

Par l'habitude, on dira tout d'un coup

54 et 3...... 57,
37 et 8...... 45.

Addition de nombres quelconques.

13. Additionner les nombres 7638, 5703, 947 et 799.

Je place les nombres proposés les uns au-dessous des autres, de manière que les unités soient sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, les mille

ous les mille; en un mot, de manière que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale.

```
 7638
 5703
  947
  799
-----
15087
```

Je trace sous le dernier nombre un trait horizontal, au-dessous duquel j'écrirai le résultat.

Pour additionner ces nombres, il suffit d'ajouter successivement les unités simples aux unités simples, les dizaines aux dizaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille.

J'additionne donc les unités contenues dans la première colonne de droite; je dis : 8 et 3 font 11, 11 et 7 font 18, 18 et 9 font 27. J'ai 27 unités; ces 27 unités donnent 7 unités que j'écris au-dessous de la colonne des unités, et 2 dizaines que je reporte à la colonne des dizaines.

J'additionne les dizaines contenues dans la seconde colonne; je dis : 2 dizaines reportées et 3 font 5, et 4 font 9, et 9 font 18. Ces 18 dizaines donnent 8 dizaines que j'écris au-dessous des dizaines, et 1 centaine que je reporte à la colonne des centaines.

J'additionne les centaines contenues dans la troisième colonne; je dis : 1 centaine reportée et 6 font 7, et 7 font 14, et 9 font 23, et 7 font 30. Ces 30 centaines donnent 3 mille; j'écris donc 0 sous les centaines, et je reporte 3 mille à la colonne antérieure.

J'additionne les mille : 3 mille reportés et 7 font dix, et 5 font 15. Ces 15 mille donnent 5 mille que j'écris sous les mille, et une dizaine de mille que j'écris à la gauche du chiffre 5. L'addition est terminée; la somme cherchée est 15087. Ainsi :

RÈGLE. *Pour additionner plusieurs nombres, on les écrit les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de même ordre soient placées dans une même colonne verticale; on trace un trait au-dessous du dernier nombre; puis, à partir de la*

droite, on fait successivement la somme des chiffres contenus dans chaque colonne verticale : si cette somme ne surpasse pas neuf, on l'écrit au-dessous telle qu'on l'a trouvée; si elle surpasse neuf, on n'écrit au-dessous que le chiffre des unités, et on reporte les dizaines à la colonne suivante.

Comme il importe d'opérer aussi rapidement que possible, on effectuera l'addition en disant simplement :

8 et 3...... 11 et 7...... 18 et 9...... 27; je pose 7, et retiens
2 et 3...... 5 et 4...... 9 et 9...... 18; je pose 8, et retiens
1 et 6...... 7 et 7...... 14 et 9...... 23, et 7.... 30, je pose 0,
et retiens 3 et 7...... 10 et 5...... 15; je pose 15.

Remarque.

14. L'addition d'une colonne fournit généralement une retenue pour la colonne de gauche; c'est pour cela que l'on commence l'opération par la droite. Si l'on opérait au contraire en allant de gauche à droite, lorsqu'une colonne donnerait une somme plus grande que 9, on serait obligé d'effacer le chiffre précédemment écrit pour l'augmenter de la retenue de la colonne suivante. Ainsi, dans l'exemple précédent, si l'on commençait par la gauche, on dirait : 7 et 5 font 12, je pose 12; la colonne suivante donne pour somme 29, j'écris 9, et, comme il faut reporter les 2 dizaines, j'efface le 2 que je remplace par 4. La troisième colonne donne 16, je pose 6, et je suis obligé d'effacer non-seulement le chiffre 9 que je remplace par 0, mais encore le chiffre 4 que je remplace par 5. On voit donc combien il est utile pour la simplicité de l'opération de commencer par la droite.

Preuve.

15. On appelle preuve d'une opération une seconde opération qui sert à vérifier l'exactitude de la première. Nous avons additionné chaque colonne verticale en allant de haut en bas; si nous recommençons l'opération en allant de bas en haut, nous devons retrouver le même résultat. Dans l'exemple

précédent, la vérification a lieu. Cependant on ne peut affirmer d'une manière absolue l'exactitude du résultat; car on aurait pu commettre dans les deux opérations des erreurs égales; mais, comme cette circonstance est tout à fait exceptionnelle, on regardera comme très-probable l'exactitude du résultat.

Exercices.

1° Un homme a reçu d'une part 7435 francs, d'autre part 1890 francs. Combien a-t-il reçu en tout?

2° On a mélangé 150 kilogrammes de nitre avec 25 kilogrammes de charbon et 25 kilogrammes de soufre, pour faire de la poudre à canon. Combien a-t-on obtenu de poudre?

3° L'Europe contient 168 millions d'habitants, l'Asie 580 millions, l'Afrique 92 millions, l'Amérique 150 millions et l'Océanie 10 millions. Quelle est la population de toute la terre?

4° Une propriété se compose de quatre parties, un pré de 1750 ares, un champ de 937 ares, un autre champ plus grand que le premier de 120 ares, et enfin un jardin de 89 ares. Quelle est l'étendue totale de la propriété?

CHAPITRE III.

SOUSTRACTION.

Définition.

16. *La soustraction est une opération par laquelle d'un nombre donné on retranche un nombre plus petit.*

Le résultat s'appelle *reste*.

Si d'un monceau de noix on ôte un certain nombre de noix, on fait une soustraction.

La soustraction est l'opération inverse de l'addition : car l'addition consiste à *ajouter*, la soustraction à *retrancher*.

Le reste est la *différence* des deux nombres donnnés. Si l'on a, par exemple, deux longueurs, l'une de 9 mètres, l'autre de 4 mètres, et que de la plus grande on retranche la plus petite, le reste sera évidemment la différence des deux longueurs données, ou l'excès de la plus grande sur la plus petite.

Si au reste on ajoute le nombre retranché, il est évident que l'on reproduit le plus grand des deux nombres donnés. La soustraction peut donc être définie de cette manière : *Étant donnés deux nombres, trouver le nombre qu'il faut ajouter au plus petit des deux nombres donnés pour reproduire le plus grand.*

Je vais, comme pour l'addition, considérer différents cas, en commençant par le plus simple.

Cas où le plus petit nombre n'a qu'un chiffre et où le plus grand est moindre que le plus petit augmenté de dix.

17. Soit à retrancher 4 de 9. Il est clair que j'arriverai au

résultat en ôtant de 9 chacune des unités qui composent le nombre 4. Une main étant fermée, j'ôte successivement l'unité, en ouvrant un doigt à chaque unité retranchée; quand j'aurai ouvert quatre doigts, je m'arrêterai. Partant de neuf, je dis donc : huit, sept, six, cinq; j'ai ouvert 4 doigts, le reste est cinq. Mais il est plus simple de chercher dans sa mémoire quel est le nombre qui, ajouté à 4, donne 9. On sait que 4 et 5 font 9; donc, si de 9 on retranche 4, il reste 5.

De 15 ôter 8. Je ferme les deux mains, et, partant de 15, je retranche successivement 8 unités, en ouvrant un doigt à chaque unité retranchée, j'arrive ainsi au reste 7. On obtient immédiatement ce résultat en cherchant quel est le nombre qui ajouté à 8 donne 15. On sait que 8 et 7 font 15; donc, si de 15 on retranche 8, il reste 7.

On pourrait effectuer une soustraction quelconque par ce procédé, en retranchant successivement du plus grand nombre donné chacune des unités qui composent le plus petit; mais comme cette opération serait trop longue, on l'abrége de la manière suivante.

Cas général.

18. De 8496 ôtez 1432. J'écris le plus petit nombre au-dessous du plus grand, de manière que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale; je trace un trait horizontal au-dessous duquel j'écrirai le résultat.

$$\begin{array}{r} 8496 \\ 1432 \\ \hline 7064 \end{array}$$

Je retranche successivement les unités des unités, les dizaines des dizaines, les centaines des centaines, les mille des mille. Je dis : 2 unités ôtées de 6 unités, il reste 4 unités, que j'écris au-dessous de la colonne des unités; — 3 dizaines ôtées de 9 dizaines, il reste 6 dizaines, que j'écris au-dessous des dizaines; — 4 centaines ôtées de 4 centaines, il ne reste rien, j'écris 0 à la colonne des centaines; — 1 mille ôté de 8 mille,

il reste 7 mille, que j'écris à la colonne des mille. Puisque toutes les parties du nombre inférieur ont été retranchées du nombre supérieur, la soustraction est effectuée; le reste est 7064.

Soit à retrancher 2739 de 3276.

$$\begin{array}{r} 3276 \\ 2739 \\ \hline 537 \end{array}$$

Ici se présente une difficulté : on ne peut ôter 9 unités de 6 unités. Pour éviter cet inconvénient, on s'appuie sur ce principe évident, que, lorsqu'on augmente deux nombres d'un même nombre, la différence ne change pas. Au nombre supérieur j'ajoute une dizaine ou dix unités, j'ai alors 16 unités; 9 unités ôtées de 16 unités, il reste 7 unités. J'ai ajouté une dizaine au nombre supérieur; pour que la différence ne change pas, j'ajoute aussi une dizaine au nombre inférieur, et je retranche 4 dizaines de 7 dizaines, il reste 3 dizaines. — Comme on ne peut ôter 7 centaines de 2 centaines, j'ajoute de même au nombre supérieur 10 centaines ou un mille, j'ai alors 12 centaines; 7 centaines ôtées de 12 centaines, il reste 5 centaines. — Pour ne pas changer la différence, j'ajoute aussi dix centaines ou un mille au nombre inférieur, et je retranche 3 mille de 3 mille, il ne reste rien. Le reste cherché est donc 537.

Afin d'effectuer la soustraction aussi rapidement que possible, on dit simplement :

9 de 16..... 7; 4 de 7..... 3; 7 de 12..... 5; 3 de 3... 0.

Soit encore la soustraction suivante :

$$\begin{array}{r} 340070 \\ 39096 \\ \hline 300974 \end{array}$$

On dira : 6 de 10.... 4; 10 de 17.... 7; 1 de 10.... 9; 10 de 10.... 0; 4 de 4.... 0; 0 de 3.... 3.

Règle. *Pour trouver la différence de deux nombres, on écrit*

le plus petit nombre au-dessous du plus grand, de manière que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale ; puis, à partir de la droite, on retranche successivement chaque chiffre du nombre inférieur du chiffre supérieur correspondant, et l'on écrit la différence au-dessous. Lorsqu'un chiffre inférieur est plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoute dix à ce dernier, en ayant soin d'augmenter, par la pensée, d'une unité le chiffre placé immédiatement à gauche dans le nombre inférieur.

Remarque.

19. Si chacun des chiffres inférieurs était plus petit que le chiffre supérieur correspondant, il serait indifférent d'opérer de gauche à droite ou de droite à gauche ; mais, comme il n'en est pas toujours ainsi, il est avantageux d'aller de droite à gauche. Si l'on allait de gauche à droite et qu'on rencontrât un chiffre inférieur plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on serait obligé d'effacer le chiffre précédemment écrit au résultat pour le diminuer d'une unité.

Preuve.

20. Quand d'un nombre on a retranché un autre, si au reste on ajoute le nombre retranché, il est clair que l'on doit retrouver le premier nombre. Ceci donne un moyen très-simple de vérifier une soustraction ; on additionnera le nombre inférieur et le reste, et l'on verra si l'on reproduit le nombre supérieur.

Vérifions de cette manière l'une des soustractions effectuées précédemment :

$$\begin{array}{r} 3276 \\ 2739 \\ \hline 537 \end{array}$$

Sans rien écrire, on dira : 9 et 7..... 16, je pose 6 et retiens 1, et 3.... 4 et 3.... 7, je pose 7; 7 et 5.... 12, je pose 2 et retiens

1, et 2.... 3. On retrouve ainsi le nombre supérieur. L'opération est exacte.

Exercices.

1° Une personne part pour un voyage avec 584 francs; à son retour elle n'a plus que 157 francs. Combien a-t-elle dépensé?

2° Une personne née en 1789 est morte en 1832. Quel était son âge?

3° Un vase vide pèse 408 grammes; plein d'alcool, il pèse 2015 grammes. Quel est le poids de l'alcool contenu dans le vase?

4° La plus haute montagne du globe, dans l'Himalaya, en Asie, a 8588 mètres d'élévation au-dessus du niveau de la mer; le Mont-Blanc, en Europe, a 4810 mètres d'élévation. De combien la première montagne surpasse-t-elle la seconde?

5° Le rayon qui va du centre de la terre au pôle est de 6356324 mètres; celui qui va à l'équateur est plus grand, il est de 6376984 mètres. Calculez la différence, ou l'aplatissement de la terre à chaque pôle.

6° La terre, dans son mouvement annuel autour du soleil, n'est pas toujours à la même distance du soleil; la plus grande distance est de 35183000 lieues, la plus petite de 34017200 lieues. Quelle est la différence?

CHAPITRE IV.

MULTIPLICATION.

Définition.

21. *La multiplication consiste à répéter un nombre nommé* MULTIPLICANDE *autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre nommé* MULTIPLICATEUR. Le résultat s'appelle PRODUIT.

Ainsi, multiplier 9 par 5, c'est répéter le nombre 9 cinq fois. 9 est le *multiplicande*, ou le nombre que l'on multiplie; 5 est le *multiplicateur*, ou le nombre qui indique combien de fois il faut répéter le multiplicande.

Si l'on a plusieurs monceaux renfermant chacun le même nombre de noix, et si on les réunit en un seul, on fait une multiplication. Le monceau total est le *produit* de la multiplication.

La multiplication, comme on le voit, n'est autre chose que l'addition de plusieurs nombres égaux entre eux. Pour multiplier 9 par 5, j'écris donc le nombre 9 cinq fois :

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 45 \end{array}$$

et j'additionne; j'obtiens le produit 45.

Mais si les nombres étaient plus grands, s'il s'agissait, par exemple, de multiplier 258 par 36, l'addition deviendrait très-longue; car il faudrait écrire 36 fois le multiplicande. Je vais expliquer comment on parvient à simplifier l'opération.

Table de multiplication.

22. Il est nécessaire de savoir d'abord par cœur les produits que l'on obtient en multipliant les neuf premiers nombres les uns par les autres deux à deux; tous ces produits sont réunis dans la table suivante, dont on attribue l'invention à Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Voici comment on forme cette table :

J'écris sur une même ligne horizontale les neuf premiers nombres. J'ajoute chacun de ces nombres à lui-même, en disant : 1 et 1 font 2, 2 et 2 font 4, 3 et 3... 6, 4 et 4... 8, 5 et 5... 10, 6 et 6... 12, 7 et 7... 14, 8 et 8... 16, 9 et 9... 18, et j'écris les résultats dans une seconde ligne horizontale au-dessous de la première. Cette seconde ligne renferme, comme on le voit, les neuf premiers nombres répétés deux fois, c'est-à-dire les produits des neuf premiers nombres par 2.

A la seconde ligne j'ajoute la première, en disant : 2 et 1... 3, 4 et 2... 6, 6 et 3... 9, etc.; et j'écris les résultats dans une troisième ligne horizontale. A deux fois chacun des neuf pre-

miers nombres, j'ai ajouté une fois ces mêmes nombres, j'ai ainsi trois fois ces nombres; la troisième ligne contient donc les produits des neuf premiers nombres par 3.

A la troisième ligne j'ajoute de même la première, en disant : 3 et 1... 4, 6 et 2... 8, 9 et 3... 12, etc.; et j'écris les résultats dans une quatrième ligne horizontale. A trois fois chacun des neuf premiers nombres, j'ai ajouté une fois ces mêmes nombres; j'ai ainsi quatre fois ces nombres ou leurs produits par 4.

On continuera de la sorte à ajouter aux nombres de la dernière ligne obtenue les nombres correspondants de la première, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux produits des neuf premiers nombres par 9. Alors on s'arrêtera, la table est complète, elle renferme tous les produits que l'on obtient en multipliant les neuf premiers nombres les uns par les autres deux à deux.

Les nombres contenus dans une même colonne verticale sont les produits du nombre placé en tête de cette colonne par chacun des neuf premiers nombres; les nombres contenus dans une même ligne horizontale sont les produits des neuf premiers nombres par le nombre placé en avant. Si donc on veut trouver dans la table un produit, le produit de 7 par 3, par exemple, on regardera la colonne verticale qui commence par 7, et la ligne horizontale qui commence par 3; le nombre 21, placé au point où se croisent les deux lignes, est le produit cherché.

Par analogie, on dit qu'on multiplie un nombre par l'unité quand on écrit ce nombre lui-même; de cette manière, la première ligne horizontale contient les produits des neuf premiers nombres par l'unité.

Il est nécessaire d'apprendre par cœur la table de multiplication; on l'énonce ainsi :

2 fois 1.... 2, 2 fois 2.... 4, 2 fois 3.... 6,.... 2 fois 9.... 18.
3 fois 1.... 3, 3 fois 2.... 6, 3 fois 3.... 9,.... 3 fois 9.... 27.
. . . .
. . . .
9 fois 1.... 9, 9 fois 2.... 18, 9 fois 3.... 27,.... 9 fois 9.... 81.

Multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un chiffre.

23. Soit à multiplier 497 par 6. L'opération consiste à répéter le multiplicande six fois; je répéterai six fois les unités, puis les dizaines, puis les centaines. J'écris le multiplicateur au-dessous du multiplicande,

$$\begin{array}{r} 497 \\ 6 \\ \hline 2982 \end{array}$$

et je souligne. Je dis : six fois 7 unités font 42 unités, j'écris 2 unités sous la colonne des unités, et je retiens 4 dizaines; six fois 9 dizaines font 54 dizaines, et 4 dizaines retenues font 58 dizaines, j'écris 8 dizaines sous la colonne des dizaines, et je retiens 5 centaines; six fois 4 centaines font 24 centaines, et 5 centaines retenues font 29 centaines, j'écris 9 centaines et 2 mille. Le produit est 2982.

On effectuera rapidement l'opération en disant : 6 fois 7.... 42, je pose 2 et retiens 4; 6 fois 9.... 54 et 4.... 58, je pose 8 et retiens 5; 6 fois 4.... 24 et 5.... 29, je pose 29. Le produit est 2982.

On commence l'opération par la droite, à cause des retenues; la raison en est la même que pour l'addition.

Multiplication d'un nombre quelconque par 10, 100, 1000, etc.

24. Proposons-nous d'abord de multiplier le nombre 5637 par 10. Il s'agit de répéter ce nombre *dix* fois, c'est-à-dire de le rendre dix fois plus grand; il suffit pour cela de mettre un zéro à sa droite, ce qui donne 56370. En effet, le chiffre 7, qui était placé au premier rang et exprimait des unités, est maintenant placé au second rang et exprime des dizaines, c'est-à-dire des unités dix fois plus grandes. Le chiffre 3, qui était placé au second rang et exprimait des dizaines, est maintenant placé au troisième rang et exprime des centaines, c'est-à-dire des unités dix fois plus grandes, et ainsi de suite. Chaque partie du nombre étant devenue dix fois plus grande, le nombre lui-même est devenu dix fois plus grand.

Proposons maintenant de multiplier le nombre 5637 par 100. Il s'agit de répéter ce nombre *cent* fois, c'est-à-dire de le rendre cent fois plus grand ; il suffit pour cela de mettre deux zéros à sa droite, ce qui donne 563700. En effet, le chiffre 7, qui était placé au premier rang et exprimait des unités, est maintenant placé au troisième rang et exprime des centaines, c'est-à-dire des unités cent fois plus grandes. Le chiffre 3, qui était placé au second rang et exprimait des dizaines, est maintenant placé au quatrième rang et exprime des mille, c'est-à-dire des unités cent fois plus grandes, et ainsi de suite. Chaque partie du nombre étant devenue cent fois plus grande, le nombre lui-même est devenu cent fois plus grand.

On verrait de même que pour multiplier le nombre 5637 par 1000, il suffit de mettre trois zéros à sa droite, ce qui donne 5637000. Car le chiffre 7, qui exprimait des unités, exprime maintenant des mille; le chiffre 3, qui exprimait des dizaines, exprime maintenant des dizaines de mille, etc.

Ainsi, *pour multiplier un nombre par* 10, 100, 1000...., *il suffit d'écrire à sa droite un, deux, trois.... zéros.*

Multiplication de deux nombres quelconques.

25. Soit à multiplier 5637 par 258. J'écris le multiplicateur au-dessous du multiplicande, et je trace un trait horizontal.

```
   5637
    258
-------
  45096
 281850
1127400
-------
1454346
```

Multiplier 5637 par 258, c'est répéter le multiplicande deux cent cinquante-huit fois, ou bien, c'est le répéter huit fois, plus cinquante fois, plus deux cents fois.

Je répète d'abord le multiplicande huit fois; j'ai le premier produit partiel 45096, que j'écris sous le trait horizontal.

Je répète maintenant le multiplicande cinquante fois. Mais 50, c'est 5 fois *dix*. On répétera donc le multiplicande cin-

quante fois, en le répétant d'abord *dix* fois, et répétant ensuite le résultat cinq fois. Pour répéter le multiplicande dix fois, il suffit, comme nous l'avons vu, de mettre un zéro à sa droite, ce qui donne 56370. Il faut ensuite répéter ce résultat cinq fois, c'est-à-dire le multiplier par 5; on a ainsi le second produit partiel 281850, que l'on écrit au-dessous du premier.

Je répète enfin le multiplicande deux cents fois. Mais 200, c'est deux fois *cent*. On répétera donc le multiplicande deux cents fois, en le répétant d'abord *cent* fois, et répétant ensuite le résultat deux fois. Pour répéter le multiplicande cent fois, il suffit de mettre deux zéros à sa droite, ce qui donne 563700; il faut ensuite répéter ce résultat deux fois, c'est-à-dire le multiplier par 2; on a ainsi, le troisième produit partiel 1127400, que l'on écrit au-dessous du second.

Ayant obtenu les trois produits partiels, on les additionne, et l'on trouve ainsi le produit demandé 1454346.

26. On obtient le premier produit partiel en multipliant le multiplicande par le premier chiffre 8 du multiplicateur. On obtiendra évidemment le second en multipliant le multiplicande par 5, ce qui donne 28185 et mettant un zéro à la droite; mais on peut se dispenser d'écrire ce zéro, en plaçant ce nombre 28185 de manière que son premier chiffre 5 se trouve dans la colonne des dizaines. On obtiendra de même le troisième produit partiel en multipliant le multiplicande par 2, ce qui donne 11274 et mettant deux zéros à la droite; mais on se dispensera d'écrire les zéros en plaçant ce nombre 11274 de manière que son premier chiffre 4 soit dans la colonne des centaines.

L'opération est disposée de la manière suivante :

```
    5637
     258
  ------
   45096
  28185
 11274
 -------
 1454346
```

On opère en disant : 8 fois 7....56, je pose 6 (dans la colonne des unités) et retiens 5; 8 fois 3....24 et 5....29, je pose 9 et

retiens 2; 8 fois 6.... 48 et 2.... 50, je pose 0 et retiens 5; 8 fois 5..... 40 et 5.... 45.

5 fois 7....35, je pose 5 (dans la colonne des dizaines) et retiens 3; 5 fois 3.... 15 et 3... 18, je pose 8 et retiens 1; 5 fois 6.... 30 et 1.... 31, je pose 1 et retiens 3; 5 fois 5.... 25 et 3.... 28, je pose 28.

2 fois 7..... 14, je pose 4 (dans la colonne des centaines) et retiens 1; 2 fois 3.... 6 et 1.... 7, je pose 7; 2 fois 6.... 12, je pose 2 et retiens 1; 2 fois 5.... 10 et 1.... 11, je pose 11.

J'additionne : le produit demandé est 1454346.

Nous pouvons maintenant formuler la règle générale de la multiplication.

Règle. *Pour multiplier deux nombres quelconques, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande; on souligne; puis on multiplie le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, en ayant soin d'écrire le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre du multiplicateur qui l'a fourni. Ensuite on additionne les produits partiels.*

27. J'applique cette règle à l'exemple suivant :

```
          470946
         3050070
    ------------
         3296622
      2354730
   1412838
   -------------
   1436418266220
```

Il n'y a pas à s'occuper des zéros qui se trouvent au multiplicateur; on multipliera d'abord par 7, puis par 5 et par 3, en ayant soin d'écrire le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre du multiplicateur qui l'a fourni. On dira donc : 7 fois 6.... 42, je pose 2 (sous le chiffre 7) et retiens 4; 7 fois 4.... 28 et 4.... 32, je pose 2 et retiens 3, etc.

5 fois 6..... 30, je pose 0 (sous le chiffre 5) et retiens 3; 5 fois 4.... 20 et 3.... 23, etc.

3 fois 6.... 18, je pose 8 (sous le chiffre 3) et retiens 1, etc.

Remarques.

28. Remarque I. Quand on effectue un produit partiel, il y a avantage, comme on l'a vu, à multiplier successivement les différents chiffres du multiplicande en allant de droite à gauche; mais on peut prendre les chiffres du multiplicateur dans un ordre quelconque. Cependant, pour plus de régularité, on s'avance aussi dans le multiplicateur de droite à gauche.

29. Remarque II. *Pour multiplier deux nombres terminés par des zéros, il suffit d'effectuer le produit de ces deux nombres, abstraction faite des zéros qui les terminent; puis d'écrire à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur proposés.*

Soit à multiplier 246000 par 54. Il s'agit de répéter 54 fois le nombre 246 mille. 54 fois 257 unités font 13284 unités; donc 54 fois 246 mille font 13284 mille ou 13284000.

Soit à multiplier 246000 par 5400. Le multiplicateur est égal à 54 fois cent; on répétera donc le multiplicande 5400 fois en le répétant d'abord 100 fois, ce qui donne 24600000, puis répétant le résultat 54 fois, ce qui donne 1328400000. On voit par là que pour multiplier 246000 par 5400, il suffit de multiplier 246 par 54, et d'ajouter cinq zéros au résultat.

30. Remarque III. *Quand on augmente le multiplicande ou le multiplicateur, le produit augmente. Quand on diminue le multiplicande ou le multiplicateur, le produit diminue.*

Ceci résulte de la définition même de la multiplication. Car, si on augmente le multiplicande sans changer le multiplicateur, on répète le même nombre de fois un nombre plus grand, ce qui donne évidemment un produit plus grand. De même, si l'on augmente le multiplicateur sans changer le multiplicande, on répète le même nombre un nombre de fois plus grand, ce qui donne aussi un produit plus grand. A plus forte raison, si on augmente à la fois le multiplicande et le multiplicateur, le produit sera-t-il plus grand.

On démontre par un raisonnement semblable que, si l'on diminue le multiplicande ou le multiplicateur, le produit diminue.

31. Remarque IV. *Si l'on rend le multiplicande ou le multiplicateur un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, le produit devient le même nombre de fois plus grand ou plus petit.*

D'abord, si, le multiplicateur restant le même, on rend le multiplicande deux, trois,..... fois plus grand, comme on répète le même nombre de fois un nombre deux, trois,..... fois plus grand, il est clair que l'on obtient un produit deux, trois.... fois plus grand.

Je suppose maintenant que, le multiplicande restant le même, on rende le multiplicateur, deux, trois, ... fois plus grand; on répète le même nombre un nombre de fois deux, trois,.... fois plus grand; le produit devient donc deux, trois, ... fois plus grand.

Ainsi, 21 étant trois fois plus grand que 7, le produit de 21 par 4 est trois fois plus grand que le produit de 7 par 4. De même, 12 étant trois fois plus grand que 4, le produit de 7 par 12 est trois fois plus grand que le produit de 7 par 4.

32. Remarque V. *Le produit renferme autant de chiffres qu'il y en a au multiplicande et au multiplicateur, ou autant moins un.*

Ainsi on peut dire d'avance que le produit de 5637 par 258 aura ou 7 ou 6 chiffres. En effet, puisque le multiplicande est plus grand que 1000, que le multiplicateur est plus grand que 100, le produit cherché sera plus grand que le produit de 1000 par 100 ou que 100000; ce produit donc aura au moins 6 chiffres. D'autre part, puisque le multiplicande est plus petit que 10000, que le multiplicateur est plus petit que 1000, le produit cherché sera plus petit que le produit de 10000 par 1000 ou que 10000000; il aura donc au plus 7 chiffres. Ainsi, le produit renferme 6 ou 7 chiffres. Dans l'exemple précédent le produit a 7 chiffres; mais le produit de 3547 par 275 n'a que 6 chiffres.

33. Remarque VI. *Le produit de deux nombres ne change pas, quel que soit celui des deux que l'on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.*

Considérons le produit des deux nombres 5 et 3. Pour figurer ce produit, écrivons 5 unités sur une même ligne horizontale et répétons trois fois cette ligne.

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

Puisque chaque ligne horizontale contient 5 unités, et qu'il y a 3 lignes semblables, le nombre total des unités contenues dans le tableau égale 3 fois 5 unités. D'autre part, on peut compter par colonnes verticales ; chacune d'elles contient 3 unités ; il y a 5 colonnes semblables ; donc le nombre total des unités contenues dans le tableau égale 5 fois 3 unités. Ainsi, le même tableau, évalué d'une façon ou de l'autre, donne 3 fois 5 ou 5 fois 3 ; donc ces deux produits sont égaux entre eux.

Preuve de la multiplication.

34. Pour vérifier si une multiplication a été bien faite, on fera une seconde multiplication, en prenant pour multiplicande le multiplicateur de la première, et pour multiplicateur le multiplicande de la première ; on doit retrouver le même produit.

Exercices.

1° Combien coûtent 6 mètres de drap à 25 francs le mètre ?

Il faut répéter six fois le prix du mètre ; c'est une multiplication dans laquelle 25 *est le multiplicande,* 6 *le multiplicateur.*

Réponse : 150 francs.

2° Un employé reçoit 247 francs par mois. Quel est son traitement annuel ?

Le traitement de l'année est égal à 12 *fois le traitement d'un mois ; il faut donc multiplier* 247 *par* 12.

Réponse : 2964 francs.

3° Une locomotive parcourt 13 lieues par heure. Quelle distance parcourra-t-elle en 7 heures ?

Il est clair qu'elle parcourt en 7 *heures une distance* 7 *fois plus grande que celle qu'elle parcourt en une heure; il faut multiplier* 13 *par* 7.

Réponse : 91 lieues.

4° On sait que le son parcourt 340 mètres par seconde. Le bruit du tonnerre a été entendu 17 secondes après l'apparition de l'éclair. On demande à quelle distance est situé le nuage orageux ?

On néglige le temps qu'emploie la lumière produite par l'éclair pour venir du nuage jusqu'à l'œil de l'observateur, temps qui est extrêmement petit. La distance cherchée est le chemin que parcourt le son en 17 *secondes; il faut multiplier* 340 *par* 17.

Réponse : 5780 mètres.

5° On sait qu'il y a 24 heures dans un jour, 60 minutes dans une heure, 60 secondes dans une minute. On demande combien il y a de minutes et de secondes dans un jour ?

Réponse : 1440 minutes ou 86400 secondes.

6° Combien y a-t-il de secondes dans 8 heures 42 minutes 56 secondes ?

On réduira d'abord les heures en minutes ; 8 *heures valent* 8 *fois* 60 *minutes ou* 480 *minutes ; ajoutant les* 42 *minutes, on a* 522 *minutes. On réduira ensuite ces minutes en secondes de la même manière, et on ajoutera les* 56 *secondes, ce qui donne* 31376 *secondes.*

7° Une roue d'une usine fait 4 tours par seconde. On demande combien de tours elle fait en 8 heures 42 minutes 56 secondes ?

En réduisant le temps en secondes, comme on l'a dit, on trouve 31376 *secondes ; il faut ensuite multiplier* 4 *tours par* 31376 *; mais ici il est plus simple de multiplier* 31376 *par* 4.

Réponse : 125504.

8° Une fontaine donne 15 litres d'eau par minute. Combien en donne-t-elle par jour ?

Réponse : 21600 litres.

9° La circonférence a été partagée en 360 degrés, le degré en

60 minutes, la minute en 60 secondes. Combien la circonférence contient-elle de minutes et de secondes?

Réponse : 21600 minutes ou 1296000 secondes.

10° La circonférence de la terre contient 360 degrés; chaque degré vaut 25 lieues communes ou 20 lieues marines. On demande combien il y a de lieues de l'une et l'autre espèce dans le tour de la terre?

Réponse: 9000 lieues communes ou 7200 lieues marines.

11° Le soleil est 1384500 fois plus gros que la terre, tandis que la lune est 80 fois plus petite que la terre. Combien de fois le soleil est-il plus gros que la lune?

Réponse : 110760000 fois.

12° Le rayon du globe terrestre est de 1432 lieues de 25 au degré; la distance du soleil à la terre est de 24000 rayons terrestres. Quelle est la distance de la terre au soleil?

Réponse : 34000000 lieues environ.

13° La lumière parcourt 70000 lieues par seconde. A quelle distance de la terre serait situé un astre dont la lumière mettrait un jour pour venir jusqu'à nous?

Réponse : 6048000000 lieues.

CHAPITRE V.

DIVISION.

Définition.

35. *La division a pour but de chercher combien de fois un nombre nommé* DIVISEUR *est contenu dans un autre nombre nommé* DIVIDENDE. Le résultat s'appelle QUOTIENT.

Ainsi, diviser 28 par 7, c'est chercher combien de fois 7 est contenu dans 28. Il est clair que la division revient à une série de soustractions successives ; car, si du dividende on retranche le diviseur autant de fois qu'il est possible, on trouvera le quotient. Du dividende 28 je retranche le diviseur 7 une première fois, il reste 21 ; je le retranche une seconde fois, il reste 14 ; une troisième fois, il reste 7 ; enfin une quatrième fois, il ne reste plus rien. Ainsi le diviseur 7 est contenu 4 fois exactement dans le dividende 28 ; le quotient cherché est 4.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 7 \\ \hline 21 \\ 7 \\ \hline 14 \\ 7 \\ \hline 7 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mais le diviseur n'est pas toujours contenu exactement dans le dividende ; dans ce cas, le dividende contient le diviseur un certain nombre de fois, plus un reste plus petit que le diviseur. Soit à diviser 31 par 7 ; de 31 je retranche 7 une

première fois, il reste 24; une seconde fois, il reste 17; une troisième fois, il reste 10; une quatrième fois, il reste 3. Ainsi le diviseur est contenu 4 fois dans le dividende, et il y a un reste 3.

```
31
 7
──
24
 7
──
17
 7
──
10
 7
──
 3
```

Nous avons effectué la division par des soustractions successives; mais si le diviseur était contenu dans le dividende un grand nombre de fois, ce moyen deviendrait extrêmement long; il importe donc de chercher un procédé plus rapide : je vais indiquer ce procédé en commençant par les cas les plus simples.

Cas où le diviseur n'a qu'un chiffre, le dividende étant moindre que dix fois le diviseur.

36. Ce cas n'offre aucune difficulté; sachant par cœur la table de multiplication, on verra de suite combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Soit à diviser 28 par 7. On sait que 4 fois 7 font 28; donc 28 contient 7 quatre fois; le quotient est 4.

Diviser 31 par 7. On sait que 4 fois 7 font 28, et que 5 fois 7 font 35. Donc le dividende 31 contient 7 quatre fois, et il y a un reste 3.

Et même, on dira immédiatement :

20 contient 5. . . . . . 4 fois.
63 contient 7. . . . . . 9 fois.
32 contient 6. . . . . . 5 fois, plus un reste 2.
77 contient 8. . . . . . 9 fois, plus un reste 5.

Cas où le diviseur a plusieurs chiffres, le dividende étant moindre que dix fois le diviseur.

27. J'examine d'abord à quel caractère on peut reconnaître que le dividende contient le diviseur et ne le contient pas dix fois; et afin de fixer les idées, je suppose que le diviseur soit un nombre de trois chiffres, par exemple 485. Le dividende doit être au moins égal à 485, et plus petit que 4850; ce sera par conséquent, ou un nombre de trois chiffres au moins égal au diviseur, ou un nombre de quatre chiffres ne renfermant pas 485 dizaines, c'est-à-dire un nombre de dizaines égal au diviseur. Ainsi le dividende a autant de chiffres que le diviseur, ou autant plus un.

Soit à diviser 2963 par 485 :

2963	485
53	6

Puisque le dividende contient le diviseur et ne le contient pas dix fois, le quotient est l'un des neuf premiers nombres. Pour déterminer lequel, il faut faire des essais; or on peut effectuer les essais de deux manières, soit en commençant par 9 et descendant progressivement jusqu'à ce qu'on obtienne un produit contenu dans le dividende, soit en commençant par 1 et montant jusqu'à ce qu'on arrive à un reste moindre que le diviseur.

On diminue le nombre des essais, et par conséquent on abrége l'opération, en remarquant que le diviseur 485 est plus grand que 400 et plus petit que 500, et en cherchant combien de fois chacun de ces nombres est contenu dans le dividende. Pour déterminer combien de fois le nombre 400 est contenu dans le dividende, il suffit de voir combien de fois 4 centaines sont contenues dans les 29 centaines du dividende, c'est-à-dire combien de fois 4 est contenu dans 29. Or 29 contient 4 sept fois; le dividende contient donc 7 fois le nombre 400; il contiendra au plus 7 fois le diviseur proposé 485, qui est plus grand que 400; mais il est possible qu'il ne le contienne pas ce nombre de fois. Ainsi le quotient cherché est ou 7 ou l'un des

nombres inférieurs; il suffit dès lors de commencer les essais à 7, en descendant jusqu'à ce qu'on obtienne un produit contenu dans le dividende. J'essaye 7 : sept fois le diviseur donne un produit 3395 plus grand que le dividende; le chiffre 7 est trop fort. J'essaye 6 : six fois le diviseur donne un produit 2910 contenu dans le dividende; le quotient cherché est 6. Si du dividende on retranche le produit 2910, on trouve un reste 53.

De ce que nous venons de dire, on conclut la règle suivante:

Règle I. — *Pour faire la division, lorsque le dividende est plus petit que dix fois le diviseur, on cherche combien de fois le chiffre des plus hautes unités du diviseur est contenu dans la partie de même ordre du dividende, et l'on essaye le chiffre ainsi obtenu; si le produit du diviseur par ce chiffre est contenu dans le dividende, ce chiffre est bon; sinon on essaye le chiffre inférieur d'une unité, et on continue les essais jusqu'à ce qu'on trouve un produit contenu dans le dividende.*

38. Mais on peut procéder d'une autre manière: je cherche combien de fois le nombre 500 est contenu dans le dividende; pour cela je cherche combien de fois 5 centaines sont contenues dans les 29 centaines du dividende, c'est-à-dire combien de fois 5 est contenu dans 29; or 29 contient 5 cinq fois; le dividende contient donc 5 fois le nombre 500; il contiendra donc au moins 5 fois le diviseur proposé 485, qui est plus petit que 500; mais il est possible qu'il le contienne un plus grand nombre de fois. Ainsi le quotient cherché est ou 5 ou un chiffre plus grand. J'essaye 5 : si le reste obtenu est plus petit que le diviseur, le dividende ne contient que 5 fois le diviseur, et le quotient est 5; si le reste est plus grand qne le diviseur, on en conclut que le chiffre 5 est trop faible. Mais on n'essayera pas 6, en faisant une nouvelle multiplication; on cherchera simplement combien de fois ce reste contient encore le diviseur, et en ajoutant à 5 ce second quotient on obtiendra le quotient cherché. Dans l'exemple actuel, le chiffre 5 donne un reste 538 fois plus grand que le diviseur; or ce reste contient encore une fois le diviseur, plus un reste 53 plus petit

que le diviseur; donc le dividende contient 6 fois le diviseur; le quotient cherché est 6. On déduit de là un second procédé pour effectuer la division, et ce procédé est plus simple que le premier.

Règle II. *Pour faire la division, lorsque le dividende est plus petit que dix fois le diviseur, on augmente d'une unité le chiffre des plus hautes unités du diviseur et on cherche combien de fois ce chiffre ainsi augmenté est contenu dans la partie de même ordre du dividende. On multiplie le diviseur par le chiffre ainsi obtenu, et on retranche le produit du dividende : si le reste est plus petit que le diviseur, le chiffre que l'on essaye est bon ; si le reste est plus grand que le diviseur, on divise ce reste par le diviseur et on ajoute au chiffre essayé ce nouveau quotient.*

39. Quel que soit d'ailleurs le procédé que l'on emploie, il est impossible, en général, de déterminer immédiatement le quotient; mais si l'on combine les deux procédés, on restreint beaucoup l'incertitude. Si l'on divise en effet la partie séparée sur la gauche du dividende, alternativement par le premier chiffre du diviseur et par ce premier chiffre augmenté d'une unité, on trouve deux nombres qui comprennent le quotient cherché. Ainsi, dans l'exemple précédent, le quotient ne peut être ni plus grand que 7 ni plus petit que 5; c'est donc l'un des trois nombres 5, 6, 7. Il y a incertitude entre ces trois nombres; deux essais au plus décideront. J'applique encore à quelques exemples :

Diviser 3280 par 687. La division de 32 par 6 et par 7 donne 5 et 4; le quotient est l'un des deux nombres 4 et 5. Un essai décidera.

Diviser 55845 par 8937. La division de 55 par 8 et par 9 donne le même nombre 6; il n'y a pas d'incertitude, le quotient est 6.

Diviser 17325 par 1936. La division de 17 par 1 donne 17; mais, puisque le dividende ne contient pas dix fois le diviseur, on sait déjà que le quotient ne peut surpasser 9; cette pre-

mière division n'apprend donc rien. D'autre part, 17 divisé par 2 donne 8; ainsi le quotient est 8 ou 9.

Diviser 1815 par 197. La division de 18 par 2 donne 9; le quotient est 9.

Division de deux nombres quelconques.

40. Soit à diviser 1739845 par 738.

Pour faciliter le raisonnement, je forme d'abord un tableau renfermant les produits du diviseur par les neuf premiers nombres, et j'observe que ce tableau peut être calculé par additions successives comme la table de multiplication; en ajoutant 738 à 738, on a deux fois le diviseur, soit 1476; en ajoutant 738 à ce nombre, on a trois fois le diviseur, soit 2214; en ajoutant 738 à ce dernier nombre, on a 4 fois le diviseur, etc.

Ce tableau étant formé, je sépare sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour avoir un nombre contenant le diviseur au moins une fois, mais ne le contenant pas dix fois. Comme les trois premiers chiffres donnent ici un nombre 173 fois plus petit que le diviseur, je prends un chiffre de plus, ce qui fait 1739.

1739845	738
1476	2357
263845	
2214	
42445	
3690	
5545	
5166	
379	

1.....	738
2.....	1476
3.....	2214
4.....	2952
5.....	3690
6.....	4428
7.....	5166
8.....	5904
9.....	6642

Ce nombre 1739, séparé sur la gauche du dividende, exprime des mille. Je cherche combien de fois ce nombre 1739 contient

le diviseur; à l'inspection du petit tableau dont nous avons parlé, on voit de suite qu'il le contient 2 fois. Puisque le diviseur est contenu deux fois dans le nombre 1739, il est contenu 2 mille fois dans le nombre 1739 mille qui est mille fois plus grand, et par conséquent dans le dividende proposé.

On peut s'assurer d'ailleurs que le diviseur n'est pas contenu 3 mille fois dans le dividende. En effet, puisque 3 fois le diviseur donnent un produit plus grand que 1739, 3 mille fois le diviseur donnent un nombre de mille plus grand que 1739 mille, et par conséquent ce nombre de mille n'est pas contenu dans le dividende proposé.

Ainsi le dividende contient 2 mille fois le diviseur et ne le contient pas 3 mille fois; j'écris donc 2 mille au quotient.

Je retranche du dividende 2 mille fois le diviseur. Deux fois le diviseur font 1476; deux mille fois le diviseur font 1476 mille; si l'on retranche ces 1476 mille des 1739 mille du dividende, il reste 263 mille, et si l'on retranche du dividende lui-même, il reste 263845.

Je cherche maintenant combien de fois ce reste 263845 contient encore le diviseur. Pour cela je considère le nombre 263845 comme un second dividende, sur lequel je raisonne comme sur le dividende proposé. Je sépare sur la gauche de ce nombre les 2638 centaines, et je cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre séparé 2638; à l'inspection du tableau, on voit qu'il y est contenu 3 fois. Puisque le diviseur est contenu 3 fois dans le nombre 2638, il est contenu 3 cents fois dans le nombre 2638 centaines, qui est cent fois plus grand, et par conséquent dans le second dividende. On verrait d'ailleurs, comme précédemment, qu'il n'est pas contenu 4 cents fois. J'écris donc 3 centaines au quotient.

Je retranche du second dividende 3 cents fois le diviseur; trois fois le diviseur font 2214; trois cents fois le diviseur font 2214 centaines, que je retranche des 2638 centaines du second dividende, il reste 424 centaines. Si l'on retranche du second dividende lui-même, il reste 42445.

Je cherche combien de fois ce nouveau reste 42445 contient encore le diviseur. Pour cela, je considère le nombre 42445

comme un troisième dividende, sur lequel je raisonne comme sur les précédents. Je sépare sur la gauche de ce nombre les 4244 dizaines, et je cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre séparé 4244; il y est contenu 5 fois. Puisque le diviseur est contenu 5 fois dans le nombre 4244, il est contenu 50 fois dans le nombre 4244 dizaines, qui est dix fois plus grand, et par conséquent dans le troisième dividende; j'écris donc 5 dizaines au quotient.

Je retranche du troisième dividende cinquante fois le diviseur. Cinq fois le diviseur font 3690; cinquante fois font 3690 dizaines, que je retranche des 4244 dizaines du troisième dividende, il reste 554 dizaines. Si l'on retranche du troisième dividende lui-même, il reste 5545.

Je cherche enfin combien de fois le diviseur est contenu dans ce reste 5545, que l'on considère comme un quatrième dividende. Il y est contenu 7 fois; j'écris donc 7 unités au quotient.

Nous voici arrivés à un reste 379, plus petit que le diviseur. La division est terminée. Ainsi le diviseur est contenu dans le dividende proposé 2000 fois, plus 300 fois, plus 50 fois, plus 7 fois; il est donc contenu en tout 2357 fois; le quotient cherché est 2357.

41. On voit que la méthode consiste à chercher combien de mille fois le diviseur est contenu dans les 1739 mille du dividende; combien de centaine de fois dans les 2638 centaines du reste; combien de dizaines de fois dans les 4244 dizaines du second reste, et enfin combien de fois dans le troisième reste 5545. On obtient ainsi successivement le chiffre des mille du quotient, celui des centaines, des dizaines et des unités.

Les nombres 1739, 2638, 4244, 5545, qui, divisés par le diviseur, donnent des chiffres successifs du quotient, s'appellent *dividendes partiels*. Comme il est inutile, dans l'opération, de considérer les dividendes complets, on n'écrira que les dividendes partiels.

```
1739845 | 738
1476    |----
-----   | 2357
 2638
 2214
 -----
  4244
  3690
  -----
   5545
   5166
   -----
    379
```

42. Dans la pratique, on se dispense ordinairement de former d'avance le tableau des produits du diviseur par les neuf premiers nombres, et l'on effectue les divisions partielles par l'un des procédés que nous avons indiqués précédemment (nos 37 et 38). Après avoir séparé sur la gauche du dividende quatre chiffres pour former le premier dividende partiel 1739, je cherche combien de fois ce premier dividende partiel contient le diviseur; il le contient 2 fois et il y a un reste 263. J'écris 2 au quotient.

On remarque que si, à la droite du reste 263, on abaisse le chiffre suivant 8 du dividende proposé, on forme le second dividende partiel 2638. Je cherche combien de fois ce second dividende partiel contient le diviseur; il le contient 3 fois, et il y a un reste 424. J'écris 3 au quotïent.

Si, à la droite du reste 424, on abaisse le chiffre suivant 4 du dividende proposé, on forme le troisième dividende partiel 4244. Je cherche combien de fois ce troisième dividende partiel contient le diviseur; il le contient 5 fois, et il y a un reste 554. J'écris 5 au quotient.

Si, à la droite du reste 554, on abaisse le dernier chiffre 5 du dividende proposé, on forme le dernier dividende partiel 5545. Je cherche combien de fois ce dernier dividende partiel contient le diviseur; il le contient 7 fois, et il y a un reste 379. J'écris 7 au quotient. L'opération est terminée; le quotient est 2357, et il reste 379.

Nous pouvons maintenant énoncer la règle générale de la division :

Règle. — *Pour diviser un nombre par un autre, on sépare sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour former un nombre au moins égal au diviseur. Cette partie séparée, ou premier dividende partiel, divisée par le diviseur, donne le premier chiffre du quotient à partir de la gauche. A la droite du reste de cette première division on abaisse le chiffre suivant du dividende, ce qui donne le second dividende partiel; en le divisant par le diviseur, on obtient le second chiffre du quotient. A la droite du second reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende proposé, ce qui donne le troisième dividende partiel. On continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé tous les chiffres du dividende.*

Remarques.

43. Remarque I. — Les dividendes partiels sont tous plus petits que dix fois le diviseur; mais il peut arriver qu'un dividende partiel, autre que le premier, soit plus petit que le diviseur; dans ce cas, le chiffre correspondant du quotient est 0, et pour avoir le dividende partiel suivant, il suffit d'abaisser encore un chiffre.

Soit, par exemple, à diviser 296212 par 486.

```
296212 | 486
2916   |-----
-----  | 609
  4612
  4374
  ----
   238
```

Je sépare quatre chiffres sur la gauche du dividende pour former le premier dividende partiel 2962; le diviseur étant contenu 6 fois dans ce premier dividende partiel, j'écris 6 centaines au quotient, et à la droite du reste 46 j'abaisse le chiffre suivant 1 du dividende proposé; le second dividende partiel 461 étant plus petit que le diviseur 486, je mets 0 au quotient, et j'abaisse le chiffre suivant 2 pour former le troisième dividende partiel 4612.

44. Remarque II. — Lorsque le quotient renferme un grand

nombre de chiffres, il est avantageux de former les produits du diviseur par les neuf premiers nombres, comme nous avons fait d'abord: l'opération marche beaucoup plus rapidement.

Exemple.

```
3 7 7 5 3 6 0 3 6 6 2 0 8 5 8 8 0 | 2 8 6
2 8 6                             |-----------------------------
-----                             | 1 3 2 0 0 5 6 0 7 2 1 0 0 9 0
  9 1 5
  8 5 8
  -----
    5 7 3                          1.....    2 8 6
    5 7 2                          2.....    5 7 2
    -------
      1 6 0 3                      3.....    8 5 8
      1 4 3 0                      4.....  1 1 4 4
      -------
        1 7 3 6                    5.....  1 4 3 0
        1 7 1 6                    6.....  1 7 1 6
        -------
          2 0 6 2                  7.....  2 0 0 2
          2 0 0 2                  8.....  2 2 8 8
          -------
              6 0 0                9.....  2 5 7 4
              5 7 2
              -----
                2 8 8
                2 8 6
                -------
                    2 5 8 8
                    2 5 7 4
                    -------
                      1 4 0
```

45. Remarque III. Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut supprimer de part et d'autre un même nombre de zéros, le quotient ne change pas. Soit, par exemple, à diviser 377000 par 28600; la question revient à chercher combien de fois 286 centaines sont contenues dans 3770 centaines; il faudra donc diviser 3770 par 286; le quotient est 13, et il reste 52 centaines. Ainsi le quotient ne change pas, mais il faut ajouter à la droite du reste les deux zéros supprimés.

```
 3770 | 286
 286  |----
----- | 13
  910
  858
 ---------
  5200
```

46. Remarque IV. Quand on a trouvé un chiffre du quotient, il faut multiplier le diviseur par ce chiffre et retrancher le produit du dividende partiel. Pour abréger un peu l'opération, on a coutume d'effectuer la soustraction en même temps que la multiplication. Soit à diviser 325826421 par 4738. Je mets en regard les deux manières de procéder.

```
325826421 | 4738            325826421 | 4738
28428     |------             41546   |------
--------- | 68768              36424  | 68768
 41546                          32582
 37904                           41541
 -----                            3637
  36424
  33166
  -----
   32582
   28428
   -----
    41541
    37904
    -----
     3637
```

Quand on a trouvé le premier chiffre 6 du quotient, au lieu de multiplier le diviseur par 6, pour retrancher ensuite le produit du premier dividende partiel, on dit : 6 fois 8 font 48 unités, je ne peux les retrancher de 2 unités : j'ajoute au dividende 5 dizaines ou 50 unités, qui, avec les 2 unités, font 52 unités; de 52 je retranche 48, il reste 4. Six fois 3 dizaines font 18 dizaines; j'ai ajouté au nombre supérieur 5 dizaines; pour que la différence ne change pas, j'ajoute aussi 5 dizaines au nombre inférieur; j'ai donc à retrancher 18 plus 5 ou 23 dizaines. J'ajoute 2 centaines ou 20 dizaines au nombre supérieur, qui, avec les 8 dizaines, font 28 dizaines; de 28 dizaines je retranche 23 dizaines, il reste 5 dizaines, etc.

On opère en disant : 6 fois 8.... 48, de 52 il reste 4 et retiens

5; 6 fois 3.... 18 et 5.... 23, de 28 il reste 5 et retiens 2; 6 fois 7.... 42 et 2.... 44, de 45 il reste 1 et retiens 4; 6 fois 4.... 24 et 4.... 28, de 32 il reste 4, etc.

Mais cette manière de procéder n'offre pas un bien grand avantage; elle dispense, il est vrai, d'écrire les produits, ce qui abrége un peu l'opération; mais elle présente cet inconvénient, que lorsqu'on retrouve au quotient un chiffre déjà obtenu, il faut recommencer une multiplication déjà faite. C'est ce qui a lieu dans l'exemple actuel; on retrouve à la fin les deux premiers chiffres 6 et 8; par le procédé ordinaire, il suffit d'écrire de nouveau les produits 28428 et 37904, déjà calculés, tandis que par l'autre procédé il faut les calculer une seconde fois. Les élèves pourront donc s'en tenir à la première méthode.

47. Remarque V. J'ai dit que, pour former le premier dividende partiel, on prend sur la gauche du dividende proposé autant de chiffres qu'il y en a au diviseur, ou autant plus un. Dans ce second cas, le nombre des dividendes partiels, et par conséquent le nombre des chiffres du quotient, est égal à l'excès du nombre des chiffres du dividende sur le nombre des chiffres du diviseur. Dans le premier cas, le nombre des chiffres du quotient est égal à cet excès plus un.

48. Remarque VI. Nous allons donner quelques exemples des différentes sortes de questions que l'on peut résoudre par la division.

1° On achète pour 35 francs de drap, à 7 francs le mètre. Combien de mètres a-t-on achetés? Il est clair que, autant de fois 7 francs sont contenus dans 35 francs, autant de mètres on a achetés. Or 7 est contenu 5 fois dans 35; donc on a acheté 5 mètres de drap.

2° On a acheté 7 mètres de drap pour 35 francs. Quel est le prix du mètre? Si le mètre coûtait 1 franc, les 7 mètres coûteraient 7 francs; si le mètre coûtait 2 francs, les 7 mètres coûteraient deux fois plus, c'est-à-dire deux fois 7 francs; si le

mètre coûtait 3 francs, les 7 mètres coûteraient 3 fois plus, c'est-à-dire 3 fois 7 francs, etc. Ainsi, autant de fois 7 francs seront contenus dans 35 francs, autant de francs coûtera le mètre. Puisque 7 est contenu 5 fois dans 35, le mètre de drap coûte 5 francs.

3° Partager 28 pommes entre 4 enfants, je prends 4 pommes et j'en donne une à chaque enfant; j'en prends 4 autres, et j'en donne une à chaque enfant, etc. Autant de fois 4 pommes seront contenues dans 28 pommes, autant de pommes recevra chaque enfant. Puisque 4 est contenu 7 fois dans 28, chaque enfant aura 7 pommes pour sa part.

49. En général, le partage d'un nombre en plusieurs parties égales revient à une division. Comme nous l'avons expliqué tout à l'heure, le partage de 28 en 4 parties égales revient à chercher combien de fois 4 est contenu en 28; car si l'on prend 4 unités dans le dividende et qu'on les distribue entre 4 personnes, chacune en aura une; ainsi, autant de fois le nombre à partager contiendra 4 unités, autant d'unités contiendra chaque part.

Il en résulte un moyen très-rapide d'effectuer la division par l'un des neuf premiers nombres. Diviser un nombre par 2 revient, comme nous l'avons dit, à le partager en deux parties égales, ou à en prendre la *moitié*. De même, diviser un nombre par 3, par 4, par 5 et par 6, etc., revient à en prendre le *tiers*, le *quart*, le *cinquième*, le *sixième*, etc. Soit à diviser 6956 par 2.

$$\begin{array}{c}6\,9\,5\,6\\3\,4\,7\,8\end{array}$$

On dira : la moitié de 6 mille est 3 mille, que l'on écrit au-dessous de 6; la moitié de 9 centaines est 4 centaines pour 8, et il reste une centaine, qui, ajoutée aux 5 dizaines du nombre proposé, fait 15 dizaines; la moitié de 15 dizaines est 7 dizaines pour 14, et il reste une dizaine, qui, avec les 6 unités, fait 16 unités; la moitié de 16 unités est 8 unités. Ainsi la moitié du nombre proposé, ou le quotient cherché, est 3478.

Je divise de la même manière 395472 par 7.

3 9 5 4 7 2
5 6 4 9 6

Je dirai en abrégeant : le septième de 39 est 5 pour 35, et il reste 4; le septième de 45 est 6 pour 42, et il reste 3; le septième de 34 est 4 pour 28, et il reste 6; le septième de 67 est 9 pour 63, et il reste 4; le septième de 42 est 6. Le quotient demandé est 56496.

Preuve.

50. Nous avons défini la division une opération qui a pour but de chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Supposons que le diviseur soit contenu exactement dans le dividende; dans ce cas, le dividende est égal au diviseur répété autant de fois qu'il y a d'unités au quotient, c'est-à-dire au produit du diviseur par le quotient, et l'on voit que la division peut être définie ainsi : *étant donnés deux nombres, appelés l'un dividende et l'autre diviseur, trouver un nombre qui, multipliant le diviseur, ou qui, multiplié par le diviseur* (ce qui est la même chose) *reproduise le dividende.*

Il en résulte une manière très-simple de vérifier la division. En multipliant le diviseur par le quotient, on devra reproduire le dividende.

Si le diviseur n'est pas contenu exactement dans le dividende, le dividende contient le diviseur un certain nombre de fois, plus un reste moindre que le diviseur; il est clair, dans ce cas, qu'en multipliant le diviseur par le quotient, et ajoutant le reste au produit, on devra encore reproduire le dividende. Je vérifie de cette manière le dernier exemple de division :

```
         4738
        68768
       ------
        37904
       28428
      33166
     37904
    28428
         3637
   ----------
    325826421
```

On retrouve le dividende; il est très-probable que l'opération est exacte.

Exercices.

1° Un père laisse en mourant une fortune de 74640 francs à partager entre 8 enfants. Quelle est la part de chacun?

On prendra le huitième de la fortune totale.

Réponse : 9330 francs.

2° On a acheté pour 585 francs de draps à raison de 13 francs le mètre. Combien de mètres a-t-on achetés?

Autant de fois 13 *francs sont contenus dans* 585 *francs, autant de mètres on a achetés. On divisera donc* 585 *par* 13.

Réponse : 45 mètres.

3° On a acheté 320 mètres d'étoffe pour 5760 francs. A combien revient le mètre?

Si le prix du mètre était de 1 *franc,* 320 *mètres coûteraient* 320 *francs. S'il était de* 2 *francs,* 320 *mètres coûteraient deux fois plus, etc.; autant de fois* 320 *francs seront contenus dans* 5760 *francs, autant de francs coûtera le mètre. Il faut donc diviser* 5760 *par* 320.

Réponse : 18 francs.

4° On a payé 60172 francs un convoi de marchandises pesant brut 1535 kilogrammes. On sait que l'emballage est la cinquième partie du poids total. A combien revient le kilogramme de marchandises?

Il faut d'abord calculer le poids de l'emballage en prenant le cinquième de 1535 *kilogrammes ; on trouve ainsi que l'emballage pèse* 307 *kilogrammes. En retranchant ce poids du poids total, on aura le poids* 1228 *kilogrammes de la marchandise elle-même. En divisant* 60172 *par* 1228, *on aura enfin le prix du kilogramme.*

Réponse : 49 francs.

5° Combien y a-t-il de minutes et d'heures dans 24056 secondes?

Puisque 60 *secondes forment une minute, autant de fois* 60 *secondes seront contenues dans* 24056 *secondes, autant de minutes nous aurons; en divisant* 24056 *par* 60, *nous trouvons ainsi* 400 *minutes, et il reste* 56 *secondes. De même, puisque* 60 *minutes forment une heure, autant de fois* 60 *minutes seront contenues dans* 400 *minutes, autant d'heures nous aurons; en divisant* 400 *par* 60, *nous trouvons* 6 *heures, et il reste* 40 *minutes. Ainsi* 24056 *secondes valent* 6 *heures* 40 *minutes et* 56 *secondes.*

6° Combien faudra-t-il de temps à une fontaine donnant 15 litres d'eau par minute pour remplir un bassin d'une capacité de 24645 litres?

Autant de fois 24645 *litres contiennent* 15 *litres, autant de minutes il faudra à la fontaine pour remplir le bassin : nous trouvons* 1643 *minutes. En opérant comme dans le problème précédent, on verra que ce nombre de minutes est égal à* 1 *jour* 3 *heures et* 23 *minutes.*

7° Quel temps faudrait-il pour faire le tour de la terre, si l'on pouvait marcher sans cesse en faisant une lieue par heure?

Réponse : 375 jours.

8° Deux voyageurs vont à la rencontre l'un de l'autre; ils sont actuellement distants de 20704 mètres; le premier fait 12 mètres par minute, le second en fait 20. On demande 1° après combien de temps les deux voyageurs se rencontreront; 2° à quelle distance ils seront alors des points de départ?

Les deux voyageurs faisant l'un 12 *mètres, l'autre* 20 *mètres par minute, la distance qui les sépare diminue de* 32 *mètres par minute; autant de fois* 32 *mètres sont contenus dans* 20704 *mètres, autant de minutes il leur faudra pour se rencontrer; en divisant* 20704 *par* 32, *on trouve ainsi* 647 *minutes ou* 10 *heures* 47 *minutes. Pendant ce temps le premier voyageur a parcouru* 7764 *mètres, et le second* 12940.

9° La circonférence de la terre est de 40 millions de mètres. Quelle est la longueur en mètres de la lieue de 25 au degré et celle de la lieue marine de 20 au degré?

Réponse : La lieue de 25 au degré vaut 4444 mètres.
La lieue marine. 5556

10° La distance de la lune à la terre est 60 fois plus grande que le rayon du globe terrestre, et ce rayon est de 6366500 mètres. On demande quel temps mettrait le son, qui parcourt 340 mètres par seconde, pour venir de la lune à la terre?

On exprimera d'abord en mètres la distance de la lune à la terre; ensuite on cherchera combien de secondes emploierait le son pour parcourir cette distance; enfin on calculera combien il y a de minutes, d'heures et de jours dans ce nombre de secondes.

Réponse : 13 jours 5 minutes.

11° La distance du soleil à la terre est de 34000000 lieues de 25 au degré, et l'on sait que la lumière met 8 minutes 13 secondes pour venir du soleil à la terre. Combien de lieues la lumière parcourt-elle par seconde?

12° L'étoile la plus rapprochée de nous est à une distance 200000 fois plus grande que le soleil. Combien de temps emploie la lumière pour venir de cette étoile jusqu'à nous?

Réponse : Environ 3 ans.

LIVRE II.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES.

CHAPITRE I.

PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS.

Signes abréviatifs.

51. On a imaginé des signes abréviatifs pour indiquer les quatre opérations arithmétiques qui ont été étudiées dans le livre précédent.

Le signe + signifie *plus*, le signe — signifie *moins*. Ainsi :

$$5 \text{ plus } 3 \text{ s'écrit } 5+3,$$
$$5 \text{ moins } 3 \text{ s'écrit } 5-3.$$

On emploie le signe ×, ou même quelquefois un simple point, pour indiquer la multiplication. Ainsi 5×3 ou 5.3 signifie 5 *multiplié par* 3.

La division est indiquée par deux points ou par un trait horizontal; au-dessus de ce trait on place le dividende, au-dessous le diviseur. Ainsi 12 *divisé par* 3 s'écrit $12 : 3$ ou $\frac{12}{3}$.

On a imaginé d'autres signes pour indiquer l'égalité ou l'inégalité de deux nombres. Le signe = est celui de l'égalité. Ainsi $5 \times 3 = 15$ exprime que le produit de 5 par 3 égale 15. Le signe > veut dire *plus grand que*; le signe < *plus petit que*. Ainsi $7 > 5$ exprime que 7 est plus grand que 5, et $5 < 7$ que 5 est plus petit que 7. L'ouverture du signe est toujours tournée du côté du plus grand nombre.

L'expression

$$5 \times 4 \times 3 \times 7$$

indique qu'il faut multiplier 5 par 4, ce qui donne 20; qu'il faut multiplier ensuite 20 par 3, ce qui donne 60; enfin qu'il faut multiplier 60 par 7, ce qui donne 420. L'expression proposée indique donc une série de multiplications successives; les nombres qui, par cette suite de multiplications, servent à former le produit final s'appellent *facteurs* du produit.

Changement de l'ordre des facteurs.

52. Je vais démontrer une proposition très-importante, et dont on fait fréquemment usage : c'est que le produit ne change pas, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les multiplications. Je dispose, par exemple, les facteurs précédemment cités dans l'ordre suivant :

$$3 \times 5 \times 7 \times 4;$$

il faut multiplier 3 par 5, ce qui donne 15, puis 15 par 7, ce qui donne 105, puis 105 par 4, ce qui donne 420; j'obtiens le même produit. Pour démontrer ce principe d'une manière générale, je considérerai successivement divers cas particuliers.

LEMME I. *Le produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Ce cas simple a été démontré dans le chapitre de la multiplication.

LEMME II. *Le produit de trois facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers.*

Nous voulons prouver, par exemple, que $5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4$. Pour figurer ce produit, écrivons le nombre 5 quatre fois sur une même ligne horizontale, et répétons cette ligne trois fois.

$$\begin{matrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{matrix}$$

Chaque ligne horizontale, se composant du nombre 5 répété quatre fois, vaut 5×4; comme il y a trois lignes, on a en tout $5\times4\times3$. D'autre part, chaque colonne verticale, se composant du nombre 5 répété trois fois, vaut 5×3; comme il y a quatre colonnes, on a en tout $5\times3\times4$. Ainsi, le même tableau, évalué d'une façon ou de l'autre, donne $5\times4\times3$ ou $5\times3\times4$. Il en résulte que le produit de trois facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers.

LEMME III. *Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers.*

Je considère les deux expressions

$$5\times4\times3\times7\times2,\quad 5\times4\times3\times2\times7.$$

Si l'on suppose effectué le produit des premiers facteurs $5\times4\times3$, les deux expressions se réduisent au produit des trois mêmes facteurs, dans lequel seulement l'ordre des deux derniers 7 et 2 a été changé, ce qui, comme on l'a vu, n'altère pas le résultat final.

LEMME IV. *Le produit de plusieurs facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques.*

Si dans le produit $5\times4\times3\times7\times2\times8$ on change l'ordre des deux facteurs consécutifs 3 et 7, on obtient le produit égal $5\times4\times7\times3\times2\times8$. En effet, si l'on effectue le produit des quatre premiers facteurs, puisque l'ordre des deux derniers seulement 3 et 7 est interverti, on obtiendra le même produit de part et d'autre, et comme ce produit est soumis ensuite aux mêmes opérations, c'est-à-dire est multiplié par 2, puis par 8, on arrivera au même résultat final.

THÉORÈME I. *Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on change d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.*

En changeant successivement l'ordre de deux facteurs consécutifs, on peut disposer les facteurs du produit

$$5\times4\times3\times7\times2\times8$$

dans tel ordre que l'on voudra. On veut, par exemple, amener le facteur 2 au premier rang; on le fera d'abord passer au quatrième rang, en changeant l'ordre des deux facteurs consécutifs 7 et 2, puis au troisième, en changeant l'ordre des facteurs consécutifs 3 et 2, puis au second, puis enfin au premier. On amènera de même au second rang celui des autres facteurs que l'on désignera, et l'on continuera de la sorte jusqu'à ce que l'on ait disposé tous les facteurs dans l'ordre voulu.

53. Théorème II. *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut combiner deux, trois,..... facteurs à volonté.*

D'abord, si les deux facteurs que l'on veut combiner sont au commencement, comme l'expression elle-même indique qu'il faut multiplier le premier par le second, on pourra effectuer cette multiplication et remplacer ainsi ces deux facteurs par leur produit. Si les deux facteurs ne sont pas au commencement, on supposera qu'ils y soient amenés, et on les remplacera par leur produit; ce produit pourra être mis ensuite à un rang quelconque.

Puisqu'on peut réunir deux facteurs, on en peut réunir trois, quatre, etc.; car on en combinera d'abord deux, puis on combinera le produit de ces deux premiers avec le troisième, etc.

Ces combinaisons de facteurs abrégent singulièrement les calculs; on demande, par exemple, la valeur du produit

$$25 \times 9 \times 5 \times 7 \times 2 \times 4.$$

Si l'on effectuait les multiplications dans l'ordre indiqué, le calcul serait trop long; mais je remarque que 2 fois 5 font 10, que 4 fois 25 font 100; je groupe donc les facteurs 2 et 5, 4 et 25, 7 et 9; l'expression proposée se réduit à

$$63 \times 10 \times 100 = 63000.$$

54. Réciproquement, *on peut décomposer un facteur en deux, trois,..... autres plus simples.*

Soit l'expression

$$35 \times 15 \times 8 \times 50;$$

je remplace 35 par 7×5, 15 par 3×5, 8 par $2\times2\times2$, 50 par 5×10, j'ai

$$5\times7\times3\times5\times2\times2\times2\times5\times10.$$

Si je groupe ensuite chaque facteur 5 avec un facteur 2, l'expression se réduit à

$$10\times10\times10\times10\times21=210000.$$

55. Corollaire I. *Lorsque les facteurs d'un produit sont terminés par des zéros, on supprime ces zéros dans le calcul; puis on ajoute à la droite du produit obtenu autant de zéros qu'on en a supprimé dans les différents facteurs.*

Soit le produit

$$7000\times360\times400.$$

En remplaçant 7000 par 7×1000, 360 par 36×10, et 400 par 4×100, on obtient

$$7\times36\times4\times1000000=1008000000.$$

56. Corollaire II. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier ce nombre successivement par les facteurs du produit.*

Soit à multiplier 23 par le produit

$$3\times5\times7=105.$$

On écrira

$$23\times105=23\times3\times5\times7.$$

57. Réciproquement, *pour diviser un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de le diviser successivement par les facteurs du produit.*

Soit à diviser le nombre 2415 par le produit $3\times5\times7$. Je divise le nombre 2415 par 3, ce qui donne 805; le quotient par 5, ce qui donne 161; ce second quotient par 7, ce qui donne 23. Je dis que 23 est le quotient que l'on obtiendrait en divisant directement le nombre 2415 par le produit effectué 105. En effet, on a

$$2415 = 3 \times 805,$$
$$805 = 5 \times 161,$$
$$161 = 7 \times 23;$$

en décomposant les facteurs, on trouve

$$2415 = 3 \times 5 \times 7 \times 23 = 105 \times 23.$$

Notions sur les puissances.

58. Le produit de plusieurs facteurs égaux à un nombre donné s'appelle une *puissance* de ce nombre; ainsi $5\times5\times5$ est la troisième puissance de 5. Pour abréger l'écriture on représente ce produit par la notation 5^3; le petit chiffre, placé en haut et à droite pour indiquer le nombre des facteurs, s'appelle *exposant;* l'exposant est l'indice de la puissance. De même le produit $7\times7\times7\times7$, que l'on écrit plus simplement 7^4, est la quatrième puissance de 7. Par analogie, le nombre 7 s'appelle la première puissance de 7; on peut lui supposer un exposant égal à l'unité.

On voit que $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$, et qu'en général une puissance quelconque de 10 est égale à l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a d'unités dans l'indice de la puissance; en d'autres termes, les puissances de 10 forment ce que dans la numération on a appelé les unités des différents ordres.

Théorème I. *Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, on ajoute leurs exposants.*

Soit $7^3\times7^2$. Si l'on décompose chaque puissance en ses facteurs, on a

$$7^3 \times 7^2 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7.$$

Or ce produit de cinq facteurs égaux à 7 n'est autre chose que 7^5.

Théorème II. *Pour diviser deux puissances d'un même nombre, on retranche l'exposant du diviseur de celui du dividende.*

Soit 7^5 à diviser par 7^3. Il faut trouver un nombre qui, multiplié par 7^3, reproduise 7^5; ce nombre est 7^2.

EXERCICES.

1° Combien y a-t-il de secondes dans un jour?

Ce nombre est exprimé par le produit $60 \times 60 \times 24$.

Réponse : 86400 secondes.

2° La circonférence a été partagée en 360 degrés, le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Combien la circonférence renferme-t-elle de secondes?

Réponse : 1296000.

3° La lumière parcourt 70000 lieues par seconde. A quelle distance de la terre serait situé un astre dont la lumière emploierait un jour pour venir jusqu'à nous?

Réponse : 6048000000 lieues.

CHAPITRE II.

DIVISIBILITÉ.

Définitions.

59. On a vu que diviser un nombre par un autre c'est chercher combien de fois le dividende contient le diviseur. Lorsque la division se fait exactement, en d'autres termes, lorsque le dividende contient le diviseur un certain nombre de fois exactement, on dit que le premier nombre est *divisible* par le second. Ainsi 28, contenant 7 quatre fois exactement, est divisible par 7.

D'autre part, on appelle *multiples* d'un nombre les produits que l'on obtient en multipliant ce nombre par les nombres consécutifs 2, 3, 4....., etc. Les multiples de 7 sont deux fois 7 ou 14, trois fois 7 ou 21, etc. Par analogie, le nombre 7, pouvant être considéré comme le produit de 7 par l'unité, est le plus petit multiple de 7.

Tout multiple d'un nombre, se composant d'un certain nombre de fois ce nombre, est divisible par ce nombre; et, réciproquement, tout nombre divisible par un autre est un multiple de ce dernier. Ainsi les deux expressions, nombre divisible par un autre, ou multiple d'un autre, ont même signification.

Lorsque le dividende ne contient pas exactement le diviseur, l'opération appelée division consiste à chercher le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende. Dans ce cas, le dividende égale un certain multiple du diviseur, plus un reste moindre que le diviseur. Ainsi, 38 égale un multiple de 7, plus un reste 3; en d'autres termes, 38 donne le reste 3, par rapport au diviseur 7.

Il est évident que la somme ou la différence de deux nombres divisibles par un troisième est divisible par ce troisième. On ajoute, par exemple, les deux nombres 21 et 35, divisibles par 7; la somme se composant de trois fois 7, plus cinq fois 7, est égale à huit fois 7, et par conséquent est divisible par 7.

Mais si l'on ajoute deux nombres, l'un divisible par un troisième, l'autre non divisible, la somme ne sera pas divisible. On ajoute, par exemple, les deux nombres 21 et 38, le premier divisible par 7, le second non divisible; le nombre 38 égale 5 fois 7, plus un reste 3; la somme se composera d'un certain nombre de fois 7, plus le même reste 3. Ainsi, dans ce cas, la somme n'est pas divisible, et elle fournit le même reste que la partie non divisible.

L'étude des restes constitue une des parties principales de la théorie des nombres; aussi importe-t-il de savoir déterminer par des procédés rapides le reste de la division d'un nombre par un autre, sans qu'on soit obligé d'effectuer la division. Je vais m'occuper de la recherche de ces procédés, en me bornant pour le moment à quelques diviseurs simples.

A cette question se rattache celle des caractères de divisibilité; on entend par là le moyen de reconnaître, à l'inspection d'un nombre, s'il est divisible par tel ou tel diviseur; car si le procédé, indiqué pour le calcul du reste, donne zéro, il est clair que le nombre donné est divisible par le diviseur que l'on considère.

Diviseur 2.

80. Les nombres divisibles par 2 s'appellent nombres *pairs*; ceux qui ne le sont pas s'appellent nombres *impairs*.

Si l'on considère la suite des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,...

on voit que les nombres pairs et les nombres impairs se succèdent alternativement. Les nombres 2, 4, 6, 8, sont pairs; les nombres 1, 3, 5, 7, 9, sont impairs. Tout nombre impair égale un nombre pair plus un.

Nous allons démontrer qu'*un nombre est pair lorsqu'il est terminé par zéro ou par l'un des chiffres pairs,* 2, 4, 6, 8, *et qu'il est impair lorsqu'il est terminé par l'un des chiffres impairs* 1, 3, 5, 7, 9.

Considérons d'abord un nombre terminé par zéro, par exemple le nombre 230. Ce nombre égale 23 fois 10; mais 10 égale 5 fois 2; donc 230 égale un certain nombre de fois 2, et par conséquent est divisible par 2.

Soit maintenant un nombre, comme 236, terminé par un chiffre pair. Ce nombre se compose de deux parties, l'une 230 divisible par 2, l'autre 6, aussi divisible par 2; donc ce nombre est lui-même divisible par 2.

Mais si le nombre est terminé par un chiffre impair, il n'est pas divisible par 2. Soit, par exemple, le nombre 237, terminé par le chiffre impair 7; ce nombre 237 égale le nombre pair 236, plus un; c'est donc un nombre impair.

En appliquant cette règle, on voit immédiatement que les nombres 150, 78, 1004 sont pairs, et que les nombres 21, 153, 67 sont impairs.

Diviseur 5.

61. En examinant la série des nombres, on reconnaît que les multiples de 5 se succèdent de cinq en cinq. Le premier multiple que l'on rencontre est le nombre 5 lui-même; après le nombre 5, viennent les quatre nombres 6, 7, 8, 9, ou 5+1, 5+2, 5+3, 5+4; ces nombres ne sont pas divisibles par 5 et donnent pour reste les quatre premiers nombres 1, 2, 3, 4. On trouve ensuite le nombre 5+5 ou 2 fois 5; c'est un nouveau multiple de 5. Les quatre nombres suivants étant égaux à 10+1, 10+2, 10+3, 10+4, ne sont pas divisibles par 5, et donnent pour restes les quatre premiers nombres; vient ensuite 10+5 ou 3 fois 5, nouveau multiple de 5. Ce raisonnement est général; les quatre nombres qui suivent un multiple quelconque de 5 sont égaux à ce multiple, plus 1, 2, 3, 4; le cinquième nombre égale le multiple précédent plus 5, c'est un nouveau multiple de 5.

Nous allons faire voir qu'*un nombre est divisible par* 5 *lorsqu'il est terminé par* 0 *ou par* 5.

Considérons d'abord un nombre tel que 240, terminé par zéro. Les raisonnements que nous avons faits sur le diviseur 2 s'appliquent au diviseur 5. Le nombre 240 égale 24 fois 10; mais 10 égale 2 fois 5; donc 240 égale un certain nombre de fois 5, et par conséquent est divisible par 5.

Soit maintenant un nombre comme 245, terminé par 5. Ce nombre se compose de deux parties, l'une 240 divisible par 5, l'autre 5 aussi divisible; donc ce nombre est lui-même divisible par 5.

Mais si le nombre n'est pas terminé par 0 ou par 5, il n'est pas divisible par 5. Par exemple, le nombre 243 égale le nombre 240 divisible par 5, plus le reste 3. De même le nombre 247 égale le nombre 245, divisible par 5, plus le reste 2. On voit donc que *le reste de la division d'un nombre par* 5 *est le même que le reste donné par le dernier chiffre.*

Diviseur 4.

62. THÉORÈME. *Le reste de la division d'un nombre par 4 égale le reste que donne le nombre formé par ses deux derniers chiffres.*

Le nombre 100, étant égal à 25 fois 4, est divisible par 4. Tout nombre terminé par deux zéros, étant un multiple de 100, est par conséquent divisible par 4. Un nombre quelconque 2736 se décompose en deux parties, l'une 2700, divisible par 4, l'autre 36, formée des deux derniers chiffres. Si cette seconde partie est divisible par 4, le nombre l'est aussi; si cette seconde partie n'est pas divisible par 4, le nombre ne l'est pas non plus, et le reste est le même que celui fourni par cette seconde partie.

COROLLAIRE. *Un nombre est divisible par 4 quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.*

Diviseur 9.

63. Lemme I. *Une unité d'un ordre quelconque égale un multiple de* 9 *plus* 1. En effet, les nombres 9, 99, 999,... que l'on forme en multipliant 9 par les nombres 1, 11, 111,... sont des multiples de 9; si l'on ajoute l'unité à ces différents nombres, on obtient 10, 100, 1000,... c'est-à-dire les unités des différents ordres.

Lemme II. *Un nombre formé d'un chiffre significatif, suivi d'un nombre quelconque de zéros, égale un multiple de* 9 *plus ce chiffre.*

Le nombre 800, par exemple, égale 8 fois 100; or, 100 égale un multiple de 9 plus 1; donc 800 égale 8 fois ce multiple, ce qui donne un multiple, plus 8 fois l'unité, ou 8.

Théorème. *Le reste de la division d'un nombre par* 9 *égale le reste de la somme de ses chiffres par* 9.

Un nombre quelconque, par exemple 3548, peut être décomposé de la manière suivante :

$$3548 = 8 + 40 + 500 + 3000.$$

La seconde partie 40 égale un multiple de 9 plus 4; la troisième partie égale un multiple de 9 plus 5; la quatrième un multiple de 9 plus 3. En réunissant tous les multiples, on obtient un multiple: on voit donc que le nombre proposé se compose d'un multiple de 9, augmenté de la somme de ses chiffres. Si cette somme est divisible par 9, le nombre lui-même sera divisible; si cette somme n'est pas divisible, le nombre ne sera pas divisible, et il donnera le même reste que la somme de ses chiffres.

Corollaire. *Un nombre est divisible par* 9, *quand la somme de ses chiffres est divisible par* 9.

L'application du théorème montre que les nombres 27, 81,

135, 2403, sont divisibles par 9; que les nombres 12, 52, 2301, ne sont pas divisibles, et donnent pour reste 3, 7, 6.

64. Remarque. On abrége l'addition des chiffres en retranchant 9 successivement dans le cours de l'opération, toutes les fois que ce sera possible; car en retranchant 9 on ne change pas le reste. J'applique au nombre 3548 : je dis 8 et 4 font 12, reste 3, et 5 font 8, et 3 font 11, reste 2; le reste de la division du nombre 3548 par 9 est 2.

Soit le nombre 2604321936. En sous-entendant la soustraction de 9, je dis : 6 et 3... 0, et 9... 0, et 1... 1, et 2... 3, et 3... 6, et 4... 1, et 6... 7, et 2... 0. Le nombre proposé est divisible par 9.

Diviseur 3.

65. Théorème. *Le reste de la division d'un nombre par* 3 *égale le reste de la division de la somme de ses chiffres par* 3.

On a démontré qu'un nombre quelconque égale un multiple de 9, plus la somme de ses chiffres. Puisque 9 est un multiple de 3, un multiple de 9 est aussi un multiple de 3; donc un nombre quelconque égale un multiple de 3, plus la somme de ses chiffres.

Corollaire. *Un nombre est divisible par* 3 *quand la somme de ses chiffres est divisible par* 3.

En faisant la somme des chiffres, on retranchera 3 ou un multiple de 3 toutes les fois que ce sera possible. Soit le nombre 125403267928; on dira: 8 et 2... 1, et 9... 1, et 7... 2, et 6... 2, et 2... 1, et 3... 1, et 4... 2, et 5... 1, et 2... 0, et 1... 1. Le reste de la division du nombre proposé par 3 est 1.

Diviseur 11.

66. Je cherche d'abord les restes que fournissent les puissances successives de 10 divisées par 11.

Le nombre 100 égale 99 plus 1; mais 99, ou 9 fois 11, est un multiple de 11; donc 100 égale un multiple de 11 plus 1.

On obtient 1000 en multipliant 100 par 10; mais 100 égale un multiple de 11 plus 1; le multiple de 11 répété 10 fois donne un multiple de 11; donc 1000 égale un multiple de 11 plus 10.

De même on obtient 10000 en multipliant 1000 par 10; mais 1000 égale un multiple de 11 plus 10; le multiple, répété 10 fois, donne un multiple; le reste 10, multiplié par 10, donne 100 ou un multiple de 11 plus 1; donc 10000 se compose de deux multiples de 11, qui, réunis, forment un multiple, plus un reste 1.

En continuant de la même manière, on trouve alternativement les restes 1 et 10, ainsi que le représente le tableau suivant:

1 =	....		1
10 =	....		10
100 =	multiple de 11	+	1
1000 =	id.	+	10
10000 =	id.	+	1
100000 =	id.	+	10
....	....	....	....

On en conclut:

Lemme I. *L'unité suivie d'un nombre pair de zéros égale un multiple de* 11 *plus* 1.

Lemme II. *L'unité suivie d'un nombre impair de zéros égale un multiple de* 11 *moins* 1. En effet, le nombre 1000, par exemple, égale un multiple de 11 plus 10; si l'on remplace 10 par 11 moins 1, on voit que le nombre 1000 égale un multiple de 11 moins 1.

Lemme III. *Un nombre formé d'un chiffre significatif, suivi d'un nombre pair de zéros, égale un multiple de* 11 *plus ce chiffre.*

Lemme IV. *Un nombre formé d'un chiffre significatif, suivi*

d'un nombre impair de zéros, égale un multiple de 11 moins ce chiffre.

THÉORÈME. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 11, on retranche la somme des chiffres de rang pair de la somme des chiffres de rang impair, augmentée de 11 si cela est nécessaire.*

Soit un nombre quelconque 1639718. Je le décompose de la manière suivante :

8 =	....	8
10 =	multiple de 11........	— 1
700 =	id....... + 7	
9000 =	id..............	— 9
30000 =	id....... + 3	
600000 =	id..............	— 6
1000000 =	id....... + 1	

Puisque la somme de tous les multiples de 11 donne un multiple de 11, le nombre proposé égale un multiple de 11, plus la somme des chiffres de rang impair, moins la somme des chiffres de rang pair.

En calculant l'une et l'autre somme, on aura soin, pour abréger, de retrancher 11 toutes les fois que ce sera possible, ce qui, comme il a été dit, ne change pas le reste. En opérant de cette manière sur le nombre proposé, on trouve 8 pour la première somme, 5 pour la seconde; le nombre 1639718 égale donc un multiple de 11, plus 8, moins 5, c'est-à-dire un multiple de 11, plus 3.

En opérant sur le nombre 8092, on trouve 2 pour la première somme, 6 pour la seconde; le nombre proposé égale donc un multiple de 11, plus 2, moins 6. Afin de pouvoir retrancher la seconde somme de la première, j'augmente celle-ci de 11, et je retranche 6 de 13, ce qui donne le reste 7.

COROLLAIRE. *Lorsque le reste ainsi obtenu est* 0, *on en conclut que le nombre est divisible par 11.*

Preuves par les restes.

67. J'ai indiqué les procédés à l'aide desquels on détermine rapidement les restes d'un nombre par rapport aux diviseurs simples 2, 3, 4, 5, 9, 11. Je compléterai plus tard cette théorie, et je l'étendrai à un diviseur quelconque; mais on peut déjà faire quelques applications de ce qui a été dit sur ce sujet.

Je considère une expression indiquant certaines opérations arithmétiques à effectuer sur des nombres donnés. Ne pourrait-on pas déterminer d'avance, sans qu'il fût nécessaire d'effectuer les calculs, le reste du résultat final?

Je suppose d'abord que l'on additionne plusieurs nombres donnés, 287, 1345, 3895, et, afin de fixer les idées, je prends les restes par rapport à 9; j'ai

$$\begin{array}{r} 287 = \text{multiple de } 9 + 8 \\ 1345 = \text{id.} \quad + 4 \\ 3895 = \text{id.} \quad + 7 \\ \hline \text{Somme} = \text{multiple de } 9 + 19. \end{array}$$

En réunissant tous les multiples, on voit que la somme des nombres proposés égale un multiple de 9, plus la somme des restes. Cette dernière somme 19 donnant pour reste 1, le reste de la division de la somme des nombres donnés par 9 est 1.

Je considère maintenant la différence de deux nombres donnés 4678 et 2695; j'ai

$$\begin{array}{r} 4678 = \text{multiple de } 9 + 7 \\ 2695 = \text{id.} \quad + 4 \\ \hline \text{Différence} = \text{multiple de } 9 + 3. \end{array}$$

Si le reste inférieur était plus grand que le reste supérieur, on ajouterait 9 à ce dernier. Exemple :

$$\begin{array}{r} 3791 = \text{multiple de } 9 + 2 \\ 2695 = \text{id} \quad + 4 \\ \hline \text{Différence} = \text{multiple de } 9 + 7. \end{array}$$

Ce qui précède peut être résumé dans le théorème suivant :

Théorème I. *Lorsque plusieurs nombres donnés sont combinés par addition ou par soustraction, le reste du résultat ne change pas si l'on augmente ou si l'on diminue chacun d'eux d'un multiple quelconque du diviseur.* On voit, en effet, qu'en opérant de la sorte on augmente ou l'on diminue le résultat d'un multiple du diviseur, ce qui ne change pas le reste. Le résultat augmente si l'on augmente les nombres à additionner; il diminue, au contraire, si l'on augmente les nombres à retrancher.

68. **Théorème II.** *Le reste d'un produit ne change pas si l'on augmente ou si l'on diminue chaque facteur d'un multiple du diviseur.*

Un produit de deux facteurs n'est autre chose que la somme de plusieurs nombres égaux au multiplicande; donc si l'on augmente ou si l'on diminue le multiplicande d'un multiple du diviseur, le produit lui-même est augmenté ou diminué d'un multiple de ce diviseur.

Dans un produit de plusieurs facteurs, comme $845 \times 67 \times 24$, on peut mettre au commencement l'un quelconque des facteurs, 67 par exemple, et supposer les autres combinés en un seul. Le produit se compose alors du facteur 67 répété un certain nombre de fois. Si donc on augmente ou si l'on diminue ce facteur d'un multiple du diviseur, le produit augmente ou diminue d'un multiple, et par conséquent le reste du produit ne change pas. Comme ce raisonnement s'applique à tous les facteurs indistinctement, le théorème est démontré.

69. **Corollaire.** Je retranche de chaque facteur le plus grand multiple du diviseur qu'il renferme, et je remplace les différents facteurs par les restes correspondants. Puisque le produit des restes ne diffère du produit proposé que d'un multiple du diviseur, j'obtiendrai le reste du produit en multipliant les restes des facteurs. Soit le produit 845×67; les restes des

deux facteurs, par rapport au diviseur 9, sont 8 et 4; le reste du produit est $8\times4=32$, ou, plus simplement, 5. Soit le produit $845\times67\times24$; on calculera d'abord le reste 5 du produit des deux premiers facteurs, on multipliera ensuite 5 par le reste 6 du troisième facteur, ce qui donne 30 ou 3 pour le reste cherché.

70. Ce qui précède donne des moyens de vérification pour les calculs arithmétiques. Je suppose qu'après avoir exécuté une série d'opérations sur des nombres donnés, on veuille s'assurer de l'exactitude des résultats. J'ai expliqué comment on détermine d'avance le reste du résultat par rapport à un certain diviseur; d'autre part, le résultat étant calculé, si l'on détermine directement son reste par rapport au même diviseur, on doit trouver le même reste.

Cependant, lorsque le même reste se reproduit de part et d'autre, on ne peut affirmer d'une manière absolue que le résultat soit exact. Car, si dans les calculs on avait commis une erreur qui fût exactement un multiple du diviseur, cette erreur, n'ayant aucune influence sur les restes, ne se manifesterait pas par ce procédé de vérification; mais il est peu probable qu'une erreur commise soit exactement un multiple du diviseur. Dans la pratique, on prend ordinairement les restes par rapport à 9, à cause de la facilité avec laquelle on les obtient.

J'applique à la multiplication ou à la division. Soit la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r} 845 \\ 67 \\ \hline 5915 \\ 5070 \\ \hline 56615 \end{array}$$

Les restes du multiplicande et du multiplicateur sont 8 et 4; 8×4 ou 32 donne le reste 5; or le produit calculé donne directement 5 pour le reste; la vérification a lieu.

Soit maintenant une division :

5 7 0 9 0	8 4 5
6 3 9 0	6 7
4 7 5	

Puisque le dividende égale le produit du diviseur par le quotient, plus le reste de la division, on a :

$$57090 = 845 \times 67 + 475 = \text{multiple de } 9 + 8 \times 4 + 7.$$

On multipliera le reste 8 du diviseur par le reste 4 du quotient, ce qui donne 32, dont le reste est 5; on y ajoutera le reste 7 du reste 475 de la division, ce qui donne 12 ou 3. Le dividende doit fournir directement le reste 3, ce qui a lieu en effet.

CHAPITRE III.

DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

Définitions.

71. Les nombres qui divisent exactement un nombre donné sont les *diviseurs* de ce nombre. Ainsi le nombre 12 admet pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12. Le plus petit diviseur d'un nombre est 1, le plus grand est ce nombre lui-même.

Les nombres qui divisent à la fois plusieurs nombres donnés sont les *communs diviseurs* de ces nombres. Parmi les communs diviseurs de plusieurs nombres, il en est un qu'il importe de considérer d'une manière spéciale, c'est le plus grand : on l'appelle *plus grand commun diviseur*. La recherche du plus grand commun diviseur a une grande importance en arithmétique.

Plus grand commun diviseur de deux nombres.

72. Lemme. *Quand deux nombres sont tels que le plus grand est divisible par le plus petit, les communs diviseurs de ces deux nombres sont les diviseurs du plus petit.*

Soient les nombres 96 et 12, tels que 96 est divisible par 12. Il est évident d'abord que les communs diviseurs de ces deux nombres sont des diviseurs de 12. Réciproquement, tout diviseur de 12 divise aussi le multiple 96; ainsi les communs diviseurs de 12 et de 96 sont les mêmes que les diviseurs de 12.

Puisque le plus grand diviseur de 12 est ce nombre lui-même, il s'ensuit que 12 est le plus grand commun diviseur des nombres 96 et 12. Ainsi *le plus grand commun diviseur de*

deux nombres, tels que le plus grand est divisible par le plus petit, est ce plus petit nombre.

THÉORÈME I. *Deux nombres quelconques admettent les mêmes communs diviseurs que le plus petit de ces nombres et le reste de la division du plus grand par le plus petit.*

Soient les deux nombres 312 et 108; en divisant le plus grand par le plus petit, on trouve 2 pour quotient et 96 pour reste. Puisque le dividende égale le produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on a

$$312 = 108 \times 2 + 96.$$

Je considère un commun diviseur de 312 et de 108; divisant 108, il divise le multiple 108×2; divisant 312 et 108×2, il divise la différence 96. Ainsi, tout commun diviseur de 312 et de 108 est commun diviseur de 108 et de 96.

Réciproquement, je considère un commun diviseur de 108 et de 96; divisant 108, il divise le multiple 108×2; divisant 108×2 et 96, il divise la somme 312. Ainsi, tout commun diviseur de 108 et de 96 est commun diviseur de 312 et de 108.

Si donc on formait deux tableaux contenant, l'un les diviseurs communs de 312 et de 108, l'autre les diviseurs communs de 108 et de 96, ces deux tableaux seraient identiquement les mêmes.

73. D'après ce théorème, la recherche des communs diviseurs des deux nombres 312 et 108 est ramenée à la recherche des communs diviseurs des deux nombres plus simples 108 et 96. J'opère de la même manière sur ces deux derniers nombres; en divisant 108 par 96, je trouve 12 pour reste. D'après le même principe, les communs diviseurs des nombres 108 et 96 sont les mêmes que ceux des nombres 96 et 12. Or 96 est divisible par 12; donc les communs diviseurs des nombres 96 et 12, et par conséquent les communs diviseurs des deux nombres proposés, ne sont autre chose que les diviseurs de 12. Comme le plus grand diviseur de 12 est 12 lui-même, il s'en-

suit que 12 est le plus grand commun diviseur des nombres **312** et **108**. De ce qui précède on conclut :

RÈGLE. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés, on divise le plus grand par le plus petit, ce dernier par le reste de la division, le premier reste par le second reste, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul; le dernier diviseur obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.*

On dispose l'opération de la manière suivante :

	2	1	8
312	108	96	12
96	12	0	

;

on place les quotients au-dessus des diviseurs, afin de laisser la place libre pour les restes.

REMARQUE. Dans cette démonstration, on est arrivé à cette conclusion que les communs diviseurs des deux nombres donnés, 312 et 108, sont précisément les diviseurs de 12. Ainsi *les diviseurs communs de deux nombres ne sont autre chose que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.* On énonce quelquefois cette proposition en disant : tout nombre qui divise deux nombres divise leur plus grand commun diviseur.

Nombres premiers entre eux.

74. Lorsque deux nombres n'admettent pas d'autre commun diviseur que l'unité, ces deux nombres sont dits *premiers entre eux.*

Il est clair que deux nombres premiers entre eux ont l'unité pour plus grand commun diviseur ; si donc, en appliquant à deux nombres donnés l'opération du plus grand commun diviseur, on trouve 1 pour dernier diviseur, il sera certain que les deux nombres donnés sont premiers entre eux. Ainsi, les leux nombres 14 et 9 sont premiers entre eux

	1	1	1	4
14	9	5	4	1
5	4	1	0	

Simplification.

75. La détermination du plus grand commun diviseur repose tout entière sur le théorème I. Je vais donner à ce théorème une signification plus étendue.

THÉORÈME II. *Les communs diviseurs de deux nombres ne changent pas, quand on remplace l'un de ces nombres par la différence entre ce nombre et un multiple quelconque de l'autre.*

Soient encore les nombres 312 et 108. Je prends la différence entre 312 et un multiple quelconque de 108, par exemple 108×3 ; je dis qu'on peut remplacer 312 par cette différence 12 ; en d'autres termes, je dis que les communs diviseurs de 312 et de 108 sont les mêmes que ceux de 12 et de 108. En effet, au moyen de l'égalité

$$312=108\times3-12,$$

on démontrera, comme précédemment, que les diviseurs communs de 312 et de 108 sont diviseurs communs de 108 et de 12 ; et que réciproquement les diviseurs communs de 108 et de 12 sont diviseurs communs de 312 et de 108 ; ainsi l'identité entre les deux sortes de diviseurs est bien démontrée.

76. Je remarque maintenant qu'en divisant un nombre par un autre on détermine le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende ; le multiple suivant est plus grand que le dividende ; on a de la sorte les deux multiples consécutifs du diviseur qui comprennent le dividende. Les différences entre le dividende et ces deux multiples sont toutes deux plus petites que le diviseur, et leur somme égale la différence des

deux multiples, et par conséquent le diviseur lui-même. Ainsi, en divisant 39 par 7, on trouve que le dividende 39 est compris entre les deux multiples consécutifs 7×5, 7×6 du diviseur; il surpasse de 4 le premier et diffère de 3 du second, la somme des deux différences est précisément le diviseur 7. La première différence est donnée par la division elle-même, c'est le reste de la division; on obtient la seconde en retranchant la première du diviseur.

Ces préliminaires étant posés, je reviens à la recherche du plus grand commun diviseur de 312 et de 108. La division de 312 par 108 donne le reste 96; ce reste 96 est la différence entre le dividende et le multiple 108×2 du diviseur; la différence avec le multiple suivant est $108-96$ ou 12; or, en vertu du théorème II, on peut remplacer 312 par l'une ou l'autre de ces différences; on choisira naturellement la plus petite 12. De cette manière, les deux nombres proposés 312 et 108 sont remplacés par les nombres plus simples 12 et 108. Comme 12 divise 108, le plus grand diviseur cherché est 12. Ainsi :

Dans la recherche du plus grand commun diviseur, si une division donne un reste plus grand que la moitié du diviseur, on remplace ce reste par l'excès du diviseur sur ce reste.

J'applique ce procédé aux nombres 35676 et 25812.

	1	2	2	2	2	3	2	2
35676	25812	9864	3780	1476	648	180	72	36
9864	6084	2304	828	180	108	36	0	
	3780	1476	648		72			

Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

77. Première Méthode. Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, il est facile de déterminer le plus grand commun diviseur d'autant de nombres qu'on veut. Soient, par exemple, les nombres 360, 600, 1368, 4212. Je

considère d'abord les diviseurs communs des deux premiers nombres 360 et 600; ces communs diviseurs, ainsi qu'il a été démontré, sont les diviseurs mêmes de leur plus grand commun diviseur 120.

Je considère maintenant les trois nombres 360, 600, 1368. Pour avoir leurs communs diviseurs, il faut, parmi les communs diviseurs des deux premiers nombres, ou parmi les diviseurs de 120, prendre seulement ceux qui divisent le troisième; ainsi les communs diviseurs des trois premiers nombres sont les communs diviseurs de 120 et de 1368. Je détermine le plus grand commun diviseur 24 de ces deux nombres; les communs diviseurs des trois nombres 360, 600, 1368 sont les diviseurs de 24. Ce nombre 24 est par conséquent le plus grand commun diviseur des trois premiers nombres.

Le raisonnement que l'on vient de faire peut être répété indéfiniment. Pour avoir les communs diviseurs des quatre nombres 360, 600, 1368, 4212, il faut, parmi les communs diviseurs des trois premiers, ou parmi les diviseurs de 24, prendre seulement ceux qui divisent le quatrième ; ainsi les communs diviseurs des quatre nombres sont les communs diviseurs de 24 et de 4212. Je détermine le plus grand commun diviseur 12 de ces deux nombres; les communs diviseurs des quatre nombres sont les diviseurs de 12. Ce nombre 12 est par conséquent le plus grand commun diviseur des quatre nombres proposés. De ce qui précède on conclut :

RÈGLE. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres donnés, on calcule d'abord le plus grand commun diviseur des deux premiers nombres ; on calcule ensuite le plus grand commun diviseur du nombre ainsi obtenu et du troisième nombre, puis le plus grand commun diviseur du nombre ainsi obtenu et du quatrième nombre, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres donnés; le dernier plus grand commun diviseur calculé est le plus grand commun diviseur cherché.*

Les raisonnements qui précèdent conduisent à cette conclu-

sion générale : *les diviseurs communs de plusieurs nombres sont les diviseurs mêmes du plus grand commun diviseur de ces différents nombres.*

Pour simplifier autant que possible le calcul, il est bon de commencer les opérations par les plus petits nombres.

78. Deuxième Méthode. Cette seconde méthode n'est que l'extension des théorèmes démontrés sur deux nombres à autant de nombres qu'on veut. Et d'abord :

Lemme. *Lorsque plusieurs nombres sont tels que le plus petit divise tous les autres, les communs diviseurs des nombres proposés sont les diviseurs du plus petit nombre, et, par conséquent, ce plus petit nombre est le plus grand commun diviseur.*

On voit, en effet, que tout diviseur commun aux nombres proposés est diviseur du plus petit, et que, réciproquement, tout diviseur du plus petit divise les autres nombres qui sont des multiples du plus petit.

Théorème III. *Les communs diviseurs de plusieurs nombres ne changent pas, quand on remplace l'un d'eux par la différence entre ce nombre et un multiple de l'un des autres.*

Soient les nombres 360, 600, 1368, 4212. Je dis qu'on peut remplacer 600, par exemple, par la différence 120 entre 600 et un multiple 360×2 du premier. En effet, il a été démontré que les communs diviseurs de 360 et de 600 sont les mêmes que ceux de 360 et de 120 ; or, pour avoir les communs diviseurs des quatre nombres proposés, il faut, parmi les communs diviseurs de 360 et de 600, ou, ce qui est la même chose, de 360 et de 120, prendre ceux qui divisent 1368 et 4212; ce sont précisément les communs diviseurs de 360, 120, 1368, 4212.

En divisant 1368 par 360 et prenant la plus petite différence 72, on pourra de même remplacer 1368 par 72; en divisant 4212 par 360, on remplacera aussi 4212 par 108. De cette manière, les quatre nombres proposés sont remplacés par les quatre nombres plus simples 360, 120, 72, 108.

On divise de même par le plus petit 72 les trois autres nombres, et on les remplace par les plus petites différences. Mais ici on observe que, 360 étant divisible par 72, on peut supprimer 360, parce que les diviseurs communs de 360 et de 72 sont les diviseurs de 72; on n'a plus alors que trois nombres 24, 72, 36. Comme 72 est divisible par 36, ces trois nombres se réduisent à deux, 24 et 36; opérant sur ces deux nombres comme précédemment, on les remplace par 24 et 12; comme 24 est divisible par 12, l'opération est terminée; 12 est le plus grand commun diviseur cherché.

RÈGLE. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres donnés, on divise par le plus petit d'entre eux tous les autres nombres, on remplace chacun des nombres divisés par la plus petite différence correspondante; on opère de la même manière sur les nouveaux nombres ainsi obtenus, et ainsi de suite. Lorsqu'un nombre est divisible par un autre, on le supprime. L'opération sera terminée quand il ne restera plus qu'un nombre; ce nombre restant est le plus grand commun diviseur cherché.*

Voilà la règle générale; mais il arrive souvent qu'on aperçoit une combinaison particulière qui simplifie considérablement l'opération. Ainsi, dans l'exemple proposé, on voit que le quatrième nombre moins sept fois le second donne une différence 12; on remplace alors le quatrième nombre par 12; comme 12 divise les trois premiers, 12 est le plus grand commun diviseur cherché.

Propriétés du plus grand commun diviseur.

79. LEMME I. *Si l'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas, et le reste est multiplié par le même nombre.*

La division de 90 par 12 donne un quotient 7 et un reste 6:

$$90=12\times7+6.$$

Si l'on multiplie par 3 chacune des deux parties qui composent le nombre 90, on a

$$90\times3=12\times7\times3+6\times3=12\times3\times7+6\times3.$$

Puisque le reste 6 est plus petit que le diviseur 12, le nombre 6×3 sera aussi plus petit que 12×3. Donc, si on divise 90×3 par 12×3, on obtient le même quotient 7 et le reste 6×3.

Lemme II. ***Si on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas, et le reste est divisé par le même nombre.***

On a démontré que quand deux nombres 90 et 12 sont divisibles par 3, le reste 6 est aussi divisible par 3. Si l'on divise par 3 les deux parties qui composent le nombre 90, on a

$$30=4\times7+2.$$

Donc, si l'on divise 90 : 3 par 12 : 3, on obtient le même quotient 7, et le reste 6 : 3.

Théorème IV. ***Si on multiplie ou si on divise plusieurs nombres par un même nombre, le plus grand commun diviseur est aussi multiplié ou divisé par ce nombre.***

Il suffit de démontrer ce théorème pour deux nombres.

Reportons-nous à la série des opérations par lesquelles on détermine le plus grand commun diviseur de deux nombres, 312 et 108. Si l'on multiplie ces deux nombres par 3, le reste 96 sera aussi multiplié par 3; les deux nombres 108 et 96 étant multipliés par 3, le second reste 12 sera aussi multiplié par 3, et ainsi de suite. Toute la série des diviseurs sera donc multipliée par le même nombre 3; si donc on cherche le plus grand commun diviseur de 312×3 et de 108×3, on trouvera 12×3.

Voici le détail de l'opération :

	2	1	8
312×3	108×3	96×3	12×3
96×3	12×3	0	

De même si l'on divise par 3 les deux nombres 312 et 108, toute la série des diviseurs sera aussi divisée par 3. Si donc

on cherche le plus grand commun diviseur de 312 : 3 et de 108 : 3, c'est-à-dire de 104 et de 36, on trouvera 12 : 3, ou 4.

80. COROLLAIRE I. Lorsqu'on veut déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres terminés par des 0, par exemple de 31200 et 10800, on supprime un même nombre de zéros de part et d'autre, et l'on opère sur les nombres 312 et 108. Le plus grand commun diviseur de ces deux nombres est 12. Pour revenir aux deux nombres proposés, il faut multiplier 312 et 108 par 100 ; le plus grand commun diviseur 12 est aussi multiplié par 100; donc le plus grand commun diviseur cherché est 1200.

81. COROLLAIRE II. *Si l'on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur, les deux quotients sont premiers entre eux.* En effet, si l'on divise les deux nombres 312 et 108 par leur plus grand commun diviseur 12, les deux quotients 312 : 12, 108 : 12, c'est-à-dire 26 et 9, auront pour plus grand commun diviseur 12 : 12 ou 1 ; donc ces deux quotients sont premiers entre eux.

82. THÉORÈME V. *Lorsqu'un nombre divise le produit de deux facteurs et qu'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs, il arrive souvent que ce nombre ne divise aucun des deux facteurs. Ainsi, le nombre 9, qui divise le produit 15×24, ne divise aucun des deux facteurs. Mais quand le nombre est premier avec l'un des facteurs, alors on peut affirmer qu'il divise l'autre facteur.

Par exemple le nombre 9 divise le produit 504 des deux facteurs 14 et 36 ; il est premier avec 14, je dis qu'il divise l'autre facteur 36. En effet, le plus grand commun diviseur des deux nombres 14 et 9, premiers entre eux, est 1. Je multiplie ces deux nombres par 36 ; d'après le théorème précédent, les deux nombres 14×36, 9×36 admettent pour plus grand commun diviseur 1×36 ou 36. Or le nombre 9 divise son multi-

ple 9×36 ; j'ai supposé d'ailleurs qu'il divise le produit 14×36 ; le nombre 9 est donc un commun diviseur des deux nombres 14×36, 9×36 ; donc il divise leur plus grand commun diviseur 36.

83. Théorème VI. *Quand un nombre est divisible séparément par deux nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit.*

Lorsqu'un nombre est divisible séparément par deux nombres, il arrive souvent que ce nombre n'est pas divisible par leur produit. Ainsi, le nombre 72, divisible séparément par 6 et par 8, n'est pas divisible par le produit 48 de ces deux nombres. Mais si les deux diviseurs sont premiers entre eux, on peut affirmer que le dividende est divisible par leur produit.

Soit un nombre 540 divisible séparément par deux nombres 4 et 9, premiers entre eux, je dis qu'il est divisible par le produit 36 de ces deux nombres. En effet 540, étant divisible par 4, égale le produit de 4 par un certain nombre 135,

$$540 = 4 \times 135.$$

Or 9 divise 540, ou le produit 4×135 ; il est premier avec le facteur 4 ; donc il divise l'autre facteur 135. Ce nombre 135, étant divisible par 9, égale le produit de 9 par un certain nombre 15. Si l'on remplace 135 par le produit 9×15, on a

$$540 = 4 \times 9 \times 15.$$

En regardant comme effectué le produit des deux premiers facteurs, on voit que 540 est un multiple de ce produit 36 ; donc le nombre 540 est divisible par 36.

84. Corollaire. Ce théorème simplifie la recherche des caractères de divisibilité. Je considère, par exemple, le diviseur 6, produit des deux facteurs 2 et 3, premiers entre eux. Pour qu'un nombre soit divisible par 6, il est nécessaire d'abord que ce nombre soit divisible séparément par 2 et par 3 ; car tout multiple de 6 est nécessairement multiple de 2 et

de 3. Cette condition d'ailleurs est suffisante, parce que les deux facteurs 2 et 3 sont premiers entre eux. Ainsi *un nombre est divisible par* 6 *quand il est pair et que la somme de ses chiffres est divisible par* 3.

De même, 12 étant le produit de deux facteurs 3 et 4 premiers entre eux, un nombre est divisible par 12 quand il est divisible par 3 et par 4.

De même, 15 étant le produit de deux facteurs 3 et 5 premiers entre eux, un nombre est divisible par 15 quand il est divisible par 3 et par 5.

86. THÉORÈME VII. *Quand un nombre est divisible séparément par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Ce théorème est la généralisation du théorème précédent.

Soit un nombre A, divisible séparément par les trois nombres a, b, c, premiers entre eux deux à deux; je vais démontrer qu'il est divisible par leur produit. Je suppose que les trois diviseurs sont premiers entre eux deux à deux, c'est-à-dire que a et b sont premiers entre eux, de même que a et c, b et c.

Le nombre A, étant divisible par a, égale le produit de a par un certain nombre q,

$$A = a \times q.$$

Puique le nombre b divise A, ou le produit $a \times q$, et qu'il est premier avec le facteur a, il divise l'autre facteur q. Donc q égale le produit de b par un certain nombre q',

$$q = b \times q'.$$

Puisque le nombre c divise A, ou le produit $a \times q$, et qu'il est premier avec a, il divise q; puisque le nombre c divise q, ou le produit $b \times q'$, et qu'il est premier avec b, il divise q'. Donc q' égale le produit de c par un certain nombre q'',

$$q' = c \times q''.$$

En décomposant successivement les facteurs, on a

$$A = a \times q = a \times b \times q' = a \times b \times c \times q''.$$

Donc le nombre A est un multiple du produit $a \times b \times c$, et par conséquent est divisible par ce produit.

La même démonstration s'applique à quatre nombres et généralement à autant de nombres qu'on veut.

Plus petit multiple.

87. On appelle *commun multiple* ou plus simplement *multiple* de plusieurs nombres un nombre qui est à la fois multiple de chacun des nombres donnés. Parmi les multiples de plusieurs nombres, il en est un qu'il importe d'étudier d'une manière spéciale, c'est le plus petit : on l'appelle *plus petit multiple*.

Il est évident que si le plus grand des nombres donnés est divisible par chacun des autres, comme il est divisible par lui-même, il est le plus petit multiple cherché. Ainsi le plus petit multiple des trois nombres 8, 12, 24 est 24. Dans le cas général, on détermine le plus petit multiple au moyen du plus grand commun diviseur.

Plus petit multiple de deux nombres.

88. Théorème VIII. *Le plus petit multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur.*

J'appelle A et B les deux nombres donnés, d leur plus grand commun diviseur, a et b les quotients premiers entre eux que l'on obtient en divisant les deux nombres donnés par leur plus grand commun diviseur. On a :

$$A = d \times a,$$
$$B = d \times b.$$

J'appelle M un multiple quelconque des nombres A et B. Puisque le multiple M est divisible par A ou par le produit $d \times a$, il est divisible par d, et le quotient $\frac{M}{d}$ est divisible par a. Puisque le multiple M est divisible par B ou par le pro-

duit $d \times b$, il est divisible par d, et le quotient $\frac{M}{d}$ est divisible par b. Le nombre $\frac{M}{d}$, divisible séparément par les deux nombres a et b, premiers entre eux, est divisible par le produit $a \times b$, en d'autres termes, est un multiple du produit $a \times b$; il en résulte que tout multiple commun M est un multiple du produit $d \times a \times b$. Réciproquement, tout multiple du nombre $d \times a \times b$ est divisible séparément par chacun des nombres A ou $d \times a$, B ou $d \times b$. Ainsi les multiples communs des deux nombres A et B sont les mêmes que les multiples du nombre $d \times a \times b$.

Puisque le nombre $d \times a \times b$ est à lui-même son plus petit multiple, il s'ensuit que ce nombre est le plus petit multiple des nombres A et B. Comme ce plus petit multiple peut s'écrire

$$d \times a \times b = A \times b = \frac{A \times B}{d},$$

on voit qu'il est égal au produit de deux nombres A et B divisé par leur plus grand commun diviseur.

Dans la pratique, pour calculer le plus petit multiple, on multiplie l'un des deux nombres donnés par le quotient que l'on obtient en divisant l'autre par le plus grand commun diviseur.

Par exemple, le plus grand commun diviseur des nombres 8 et 12 est 4; on calculera le plus petit multiple de ces deux nombres en divisant par 4 le produit 8×12, ou plus simplement en multipliant l'un deux 8 par le quotient 3 que l'on obtient en divisant l'autre 12 par 4, ce qui donne 24. Ce plus petit multiple contient exactement 3 fois le premier nombre, 2 fois le second.

89. Corollaire I. Il résulte de la démonstration précédente que les multiples communs de deux nombres A et B sont les multiples de leur plus petit multiple $d \times a \times b$.

Le plus petit multiple des deux nombres 8 et 12 est 24. Si l'on multiplie 24 par chacun des nombres 1, 2, 3, 4....., on

forme la série indéfinie des multiples communs de 8 et 12, savoir :

24, 48, 72, 96, 120. . . . .

90. Corollaire II. Le plus petit multiple de deux nombres premiers entre eux est égal au produit de ces deux nombres, puisque leur plus grand commun diviseur est l'unité. Ainsi le plus petit multiple des deux nombres 4 et 9, premiers entre eux, est leur produit 36.

Plus petit multiple de plusieurs nombres.

91. Soient les quatre nombres 8, 12, 15, 18. Je détermine d'abord le plus plus petit multiple 24 des deux premiers nombres 8 et 12; on sait que les multiples communs de ces deux nombres sont les multiples de 24. Pour avoir les multiples communs des trois premiers nombres, il faut, parmi les multiples de 24, prendre seulement ceux qui sont divisibles par le troisième. Ainsi les multiples communs des trois premiers nombres sont les multiples communs de 24 et de 15. Je détermine le plus petit multiple 120 de ces deux nombres; les multiples communs des trois nombres 8, 12, 15 sont les multiples de 120. Ce nombre 120 est par conséquent le plus petit multiple des trois premiers nombres.

Le raisonnement précédent peut être répété indéfiniment. Pour avoir les multiples communs des quatre nombres 8, 12, 15, 18, il faut, parmi les multiples des trois premiers, ou parmi les multiples de 120, prendre seulement ceux qui sont divisibles par le quatrième; les multiples communs des quatre nombres sont les multiples communs de 120 et de 18. Je détermine le plus petit multiple 360 de ces deux nombres; les multiples communs des quatre nombres sont les multiples de 360. Ce nombre 360 est par conséquent le plus petit multiple des quatre nombres proposés. Ainsi :

Règle. *Pour trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres donnés, on détermine d'abord le plus petit multiple des deux*

premiers nombres, puis le plus petit multiple du nombre ainsi obtenu et du troisième nombre, et on continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres donnés. Le dernier nombre calculé est le plus petit multiple cherché.

Les raisonnements qui précèdent conduisent à cette conclusion générale que *les multiples communs de plusieurs nombres sont les multiples du plus petit multiple de ces différents nombres.*

CHAPITRE IV.

DES NOMBRES PREMIERS.

Définitions.

92. Un nombre *premier* est un nombre qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité. Ainsi le nombre 7, qui n'est divisible que par 1 et par 7, est un nombre premier.

Lorsqu'un nombre n'est pas premier, il est décomposable en deux facteurs plus petits que lui. Ainsi le nombre 42, étant divisible par 6, égale le produit des deux facteurs 6 et 7. Le facteur 6, étant à son tour divisible par 2, égale 2×3; de sorte que le nombre 42 se trouve décomposé en trois facteurs $2 \times 3 \times 7$. Lorsque le nombre proposé est premier, il est impossible de le décomposer en facteurs plus petits que lui.

Il est clair que tout nombre non premier peut être considéré comme un produit de facteurs premiers; car on pourra toujours pousser la décomposition en facteurs, jusqu'à ce qu'on arrive à des facteurs premiers. Ainsi, en multipliant les nombres premiers les uns par les autres, on forme tous les nombres.

Les nombres premiers sont en quelque sorte les éléments constitutifs de tous les nombres; on comprend par là de quelle importance est l'étude de leurs propriétés. J'explique d'abord comment on les détermine.

Recherche des nombres premiers.

93. Je suppose qu'on veuille former le tableau des nombres premiers plus petits que 100. On écrit les cent

premiers nombres à la suite les uns des autres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. . . . .
. . . . 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Partant de 2, on barre les nombres de deux en deux, savoir : 4, 6, . . . Les nombres ainsi barrés sont les multiples de 2 ou les nombres pairs.

Partant de 3, on barre les nombres de trois en trois, savoir : 6, 9, 12, 15, . . . Les nombres ainsi barrés sont les multiples de 3.

Les multiples de 4 ont déjà été barrés, puisque ce sont des multiples de 2.

Partant de 5, on barre les nombres de 5 en 5, savoir : 10, 15, 20, . . . ; ce sont les multiples de 5.

Les multiples de 6 sont déjà barrés comme multiples de 2 et de 3.

Partant de 7, on barre les nombres de 7 en 7; ce sont les multiples de 7.

Les multiples de 8 et de 9 sont déjà barrés, les premiers comme multiples de 2, les seconds comme multiples de 3.

Il est inutile d'aller plus loin. En effet, lorsqu'un nombre plus petit que 100, par exemple 96, est divisible par un nombre 12 plus grand que 10, il est égal au produit de 12 par un quotient 8 nécessairement plus petit que 10, et par conséquent il est aussi divisible par 8; en un mot, lorsqu'un nombre plus petit que 100 est multiple d'un nombre plus grand que 10, il est aussi multiple d'un nombre plus petit que 10, et, comme tel, a déjà été barré.

Les nombres non barrés
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 97
sont les nombres premiers.

94. Si l'on voulait former le tableau des nombres premiers plus petits que 1000, on écrirait les mille premiers nombres à la suite les uns des autres et on barrerait comme précédemment les multiples de 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... On s'arrêterait après avoir barré les multiples de 31, parce que le nombre 32, multiplié par lui-même, donne un résul-

tat plus grand que 1000. Tout nombre plus petit que 1000, multiple d'un nombre plus grand que 31, est aussi multiple d'un nombre plus petit que 31, et, comme tel, aura déjà été barré.

95. Il est aisé de voir que la *suite des nombres premiers est illimitée.* Supposons en effet que cette suite soit limitée, et désignons par la lettre a le plus grand des nombres premiers; formons le produit de tous les nombres premiers et ajoutons l'unité à ce produit, nous obtiendrons un nombre que nous appellerons N,

$$N = 1.2.3.5.7.11 \ldots\ldots a + 1.$$

Ce nombre étant formé de deux parties, la première divisible par chacun des nombres premiers, la seconde non divisible, ne serait divisible par aucun nombre premier autre que l'unité; ce serait donc un nombre premier. On obtiendrait de la sorte un nombre premier plus grand que a, ce qui est contraire à l'hypothèse.

96. Lemme. *Lorsqu'un nombre premier ne divise pas un nombre, il est premier avec lui.*

Par exemple, le nombre premier 7, ne divisant pas 20, est premier avec 20. En effet, puisque les seuls diviseurs de 7 sont 1 et 7, les communs diviseurs de 7 et de 20 ne peuvent être que 1 et 7; or 7 ne divise pas 20; le seul commun diviseur de ces deux nombres est donc 1, et par conséquent ces deux nombres sont premiers entre eux.

Théorème IX. *Lorsqu'un nombre premier divise le produit de plusieurs facteurs, il divise au moins l'un d'eux.*

Je considère d'abord un produit de deux facteurs 14×20, divisible par un nombre premier 7; je dis que l'un des facteurs est divisible par 7. En effet, si 7 divise 20, le théorème est démontré; s'il ne divise pas 20, il est premier avec lui, et, en vertu du théorème V, il doit diviser l'autre facteur 14.

Je considère maintenant un produit de trois facteurs, par exemple $14\times20\times16$, divisible par un nombre premier 7; je dis que l'un des facteurs, au moins, est divisible par 7. En effet, je suppose effectué le produit 14×20 des deux premiers facteurs; le nombre premier 7 divise le produit des deux nombres 14×20 et 16, et par conséquent divise l'un d'eux. S'il divise 16, le théorème est démontré. S'il ne divise pas 16, il divise l'autre nombre 14×20; dans ce cas, le nombre premier 7 divise le produit 14×20 de deux facteurs, et l'on sait qu'il doit diviser l'un d'eux, 20 ou 14. Ainsi 7 divise nécessairement l'un des trois facteurs 16, 20, 14.

Ce mode de raisonnement peut être étendu facilement à autant de facteurs que l'on veut. Je suppose que le nombre premier 7 divise un produit de quatre facteurs

$$14 \times 20 \times 16 \times 12,$$

je dis qu'il divise l'un d'eux. Je regarde en effet le produit des trois premiers facteurs comme effectué, le nombre 7 divise le produit des deux nombres $14\times20\times16$ et 12, et par conséquent divise l'un d'eux. S'il divise 12, le théorème est démontré. S'il ne divise pas 12, il divise l'autre nombre $14\times20\times16$; dans ce cas le nombre premier 7 divise le produit de trois facteurs, et par conséquent divise l'un d'eux.

Le théorème, étant démontré pour quatre facteurs, s'étendra de même à cinq facteurs, puis à six, à sept, etc. Le théorème est donc vrai pour un nombre quelconque de facteurs.

97. COROLLAIRE I. *Lorsqu'un nombre premier divise une puissance d'un nombre, il divise ce nombre.*

En effet, une puissance d'un nombre est un produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre; le nombre premier, divisant le produit, divise l'un des facteurs, et par conséquent divise le nombre qui a été élevé à la puissance. Ainsi le nombre premier 7, divisant le nombre 9261, qui est la troisième puissance de 21, divise nécessairement 21.

98. COROLLAIRE II. *Quand deux nombres sont premiers entre*

eux, deux puissances quelconques de ces deux nombres sont premières entre elles.

Soient deux nombres 15 et 28, premiers entre eux; je veux démontrer que des puissances quelconques 15^3, 28^2 de ces deux nombres sont aussi deux nombres premiers entre eux. En effet, si ces deux puissances n'étaient pas premières entre elles, elle admettraient un plus grand commun diviseur autre que l'unité. Je suppose d'abord que ce plus grand commun diviseur soit un nombre premier; ce nombre premier, divisant 15^3 et 28^2, diviserait 15 et 28 : les deux nombres 15 et 28 admettraient ainsi un diviseur commun autre que l'unité, ce qui est impossible, puisque ces deux nombres sont premiers entre eux. Je suppose maintenant que le plus grand commun diviseur des deux puissances 15^3 et 28^2 soit un nombre non premier, ce nombre sera divisible nécessairement par un certain nombre premier, et ce nombre premier diviserait les deux puissances, et par conséquent les deux nombres eux-mêmes, ce qui est impossible.

99. Théorème X. *Un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers.*

J'ai dit qu'un nombre quelconque peut être considéré comme un produit de nombres premiers; je vais démontrer que, quel que soit le procédé de décomposition qu'on emploie, on arrive toujours au même résultat final; en d'autres termes, qu'il n'y a qu'une manière de représenter un nombre donné par un produit de facteurs premiers. Tout se réduit évidemment à démontrer que, lorsque deux produits de facteurs premiers représentent le même nombre, ils sont composés identiquement de la même manière.

Je suppose que le facteur premier 7 se trouve dans le premier produit, il se trouvera aussi dans le second. En effet, le nombre 7, divisant le premier produit, et par conséquent le second, qui est égal au premier, divisera l'un des facteurs qui composent ce second produit; comme ces facteurs sont premiers, l'un d'eux sera précisément 7.

Je suppose maintenant que le premier produit renferme le

facteur 7 trois fois, c'est-à-dire $7\times7\times7$ ou 7^3, le second produit renfermera aussi 7^3. Car si le second produit renfermait, par exemple 7^2, en divisant les deux produits égaux par 7^2, on aurait encore deux produits égaux, l'un renfermant le facteur 7, l'autre ne le renfermant pas, ce qui est impossible.

Ainsi les deux produits égaux sont composés des mêmes facteurs premiers affectés des mêmes exposants. C'est identiquement la même expression.

Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers.

100. Proposons-nous de décomposer le nombre 504. On remarque d'abord que ce nombre, étant terminé par un chiffre pair, est divisible par le facteur premier 2; en effectuant la division, on aura

$$504 = 2 \times 252.$$

Le nombre 252 est encore divisible par 2, et l'on a

$$252 = 2 \times 126.$$

Le nombre 126 est encore divisible par 2, et l'on a

$$126 = 2 \times 63.$$

Le nombre 63 n'est plus divisible par 2; mais, la somme de ses chiffres étant divisible par 3, ce nombre est divisible par 3, et l'on trouve, en effectuant la division,

$$63 = 3 \times 21.$$

Le nombre 21 est encore divisible par 3, et l'on a

$$21 = 3 \times 7.$$

Le nombre 7 étant premier, la décomposition est terminée. On a finalement

$$504 = 2\times2\times2\times3\times3\times7 = 2^3\times3^2\times7.$$

On dispose ordinairement l'opération de la manière suivante :

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7

Décomposer le nombre 1500 en ses facteurs premiers. Au lieu d'opérer comme précédemment, il est plus simple d'observer que $1500=15\times100$, et de décomposer séparément les deux nombres 15 et 100. Puisque $15=3\times5$ et que $100=10\times10=2^2\times5^2$, on a

$$1500=2^2\times3\times5^3.$$

101. La décomposition des nombres en facteurs premiers permet de résoudre presque instantanément un grand nombre de questions sur les nombres.

Considérons deux nombres quelconques décomposés en leurs facteurs premiers; par exemple

$$360=2^3\times3^2\times5.$$
$$336=2^4\times3\times7.$$

Le produit de ces deux nombres est

$$360\times336=2^3\times3^2\times5\times2^4\times3\times7.$$

En réunissant les facteurs $2^3\times2^4$, ce qui se fait par l'addition des exposants, on a 2^7. De même le produit $3^2\times3$ donne 3^3; car on peut considérer le second facteur comme étant affecté de l'exposant 1. Ainsi on a pour le produit demandé

$$360\times336=2^7\times3^3\times5\times7,$$

et l'on voit que l'on effectue la multiplication en ajoutant les exposants des facteurs premiers qui entrent dans les deux nombres, et écrivant les autres à la suite.

Quand deux nombres sont décomposés en facteurs premiers, il est aisé de reconnaître si le plus grand est divisible par le plus petit; il faut pour cela que le premier renferme tous les

facteurs premiers du second avec des exposants au moins égaux. Car, le nombre dividende, étant égal au produit du diviseur par le quotient, contient tous les facteurs premiers du diviseur, et en outre ceux du quotient. Ainsi, on voit immédiatement que le nombre $2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$ est divisible par le nombre $2^3 \times 3^2 \times 5$. On effectue la division en retranchant les exposants du diviseur des exposants des mêmes facteurs dans le dividende, et écrivant à la suite les facteurs du dividende qui n'entrent pas dans le diviseur. Le quotient est ici $2^2 \times 3 \times 7$; car, en multipliant le diviseur par le quotient, on reproduit le dividende.

Diviseurs d'un nombre.

102. Un diviseur quelconque d'un nombre se compose d'une partie des facteurs premiers de ce nombre. Si donc on combine ces facteurs premiers de toutes les manières possibles, soit un à un, soit deux à deux, etc., on formera tous les diviseurs du nombre proposé.

Je vais expliquer, sur le nombre 360, comment on effectue ordinairement ces combinaisons.

		1
360	2	2
180	2	4
90	2	8
45	3	3, 6, 12, 24,
15	3	9, 18, 36, 72,
5	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Les deux premières colonnes verticales de gauche représentent la décomposition du nombre 360 en facteurs premiers; à droite sont placés les diviseurs cherchés. Pour les former, j'ai mis en tête le diviseur 1; je l'ai multiplié par le facteur premier 2, et j'ai écrit le produit 2 au-dessous. Je trouve ensuite dans la deuxième colonne verticale un second facteur premier 2; je multiplie par ce facteur les deux diviseurs déjà obtenus, je forme ainsi le diviseur 2 déjà écrit et un nouveau

diviseur 4 que j'écris au-dessous. Je continue de la sorte à multiplier tous les diviseurs déjà formés par le facteur premier suivant, en ayant soin de ne pas écrire deux fois le même diviseur. Ainsi, quand j'arrive au facteur 3, je multiplie par 3 les quatre diviseurs précédemment obtenus, ce qui donne quatre diviseurs nouveaux 3, 6, 12, 24. J'arrive alors au second facteur 3, par lequel je multiplie les huit diviseurs déjà trouvés. Quatre se reproduisent, je ne les écris pas; j'écris seulement les quatre nouveaux 9, 18, 36, 72. En multipliant par 5 les douze diviseurs déjà obtenus, on forme douze diviseurs nouveaux que l'on écrit.

Il est aisé de voir que de cette manière toutes les combinaisons possibles ont été formées avec les facteurs premiers du nombre proposé, et que par conséquent on a obtenu tous les diviseurs de ce nombre. Le plus petit diviseur est l'unité, le plus grand le nombre lui-même.

103. Il est facile de dire, *à priori*, combien un nombre donné admet de diviseurs. Je reprends le nombre 360, qui, décomposé en ses facteurs premiers, est

$$2^3 \times 3^2 \times 5.$$

J'écris sur une ligne horizontale l'unité et les puissances successives de 2 jusqu'à 2^3, sur une seconde ligne l'unité et les puissances de 3 jusqu'à 3^2, sur une troisième ligne l'unité et 5:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 1, & 3, & 3^2, & \\ 1, & 5. & & \end{array}$$

La première ligne horizontale contient, outre l'unité, les diviseurs formés avec le facteur 2. La deuxième ligne contient de même, outre l'unité, les diviseurs formés avec le facteur 3. La première renferme 3 + 1, ou 4 nombres, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de 2^3 plus 1. La seconde renferme 2+1 ou 3 nombres, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de 3^2 plus 1. La troisième contient deux nombres, c'est 1+1. Je multiplie maintenant chacun des nombres

de la première ligne par chacun des nombres de la seconde, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2. \end{array}$$

Quand on multiplie les nombres de la première ligne par 1, on reproduit cette ligne, c'est-à-dire l'unité et les diviseurs formés avec le facteur 2. Quand on multiplie ces mêmes nombres par 3, on obtient le diviseur 3 et les diviseurs formés avec les facteurs 2 et un facteur 3. Quand on multiplie par 3^2, on obtient de même le diviseur 3^2 et les diviseurs formés avec les facteurs 2 et 3^2. On a ainsi tous les diviseurs formés avec les facteurs 2 et 3, pris séparément ou combinés. Le nombre de ces diviseurs est 4×3 ou 12.

On multiplie ensuite chacun des nombres de ce tableau par chacun des nombres de la troisième ligne

$$1, \quad 5.$$

En multipliant par 1, on reproduit tous les diviseurs précédemment formés ; en multipliant par 5, on obtient les diviseurs qui contiennent 5. Le nombre total des diviseurs est donc 12×2 ou $4\times 3\times 2$, c'est-à-dire

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1).$$

On conclut de là que *le nombre des diviseurs d'un nombre est égal au produit des exposants de ses facteurs premiers, augmentés chacun d'une unité.*

Plus grand commun diviseur.

104. Quand les nombres sont décomposés en facteurs premiers, on obtient de suite leur plus grand commun diviseur. En effet, tout diviseur commun de plusieurs nombres se compose évidemment de facteurs premiers communs aux différents nombres proposés ; en prenant tous les facteurs premiers communs, on aura le plus grand commun diviseur. Soient, par exemple, les nombres

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$
$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2,$$
$$336 = 2^4 \times 3 \times 7.$$

Il y a deux facteurs 2 et un facteur 3 communs à ces trois nombres; leur plus grand commun diviseur est $2^2 \times 3$. Ainsi, *le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres se compose des facteurs premiers communs à ces différents nombres, affectés chacun de son plus petit exposant.*

Une fois le plus grand commun diviseur trouvé, il est facile d'obtenir les diviseurs communs; car ce sont les diviseurs du plus grand commun diviseur.

105. On reconnaît que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont pas de facteur premier commun; car alors ces deux nombres n'ont pas d'autre commun diviseur que l'unité. Ainsi les deux nombres

$$308 = 2^2 \times 7 \times 11,$$
$$75 = 3 \times 5^2,$$

n'ayant pas de facteur premier commun, sont premiers entre eux.

Plus petit multiple.

106. Un nombre divisible à la fois par plusieurs autres doit renfermer évidemment les facteurs premiers de chacun d'eux. Soient les nombres

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$
$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2,$$
$$336 = 2^4 \times 3 \times 7.$$

Tout nombre, divisible à la fois par chacun d'eux, renfermera au moins quatre facteurs 2, deux facteurs 3, deux facteurs 5 et un facteur 7. On obtiendra le plus petit multiple des nombres proposés en ne prenant que les facteurs que l'on vient d'énumérer, et qui sont strictement nécessaires, ce qui donne

$$2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 25200.$$

Ainsi, *le plus petit multiple de plusieurs nombres se compose de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces différents nombres, affectés chacun de son plus fort exposant.*

Les quotients du plus petit multiple par chacun des nombres donnés sont ici

$$2 \times 5 \times 7 = 70,$$
$$2^2 \times 7 = 28,$$
$$3 \times 5^2 = 75.$$

Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, ces deux nombres n'ayant pas de facteurs communs, leur plus petit multiple est le produit même de ces deux nombres. Par exemple, les deux nombres

$$28 = 2^2 \times 7,$$
$$15 = 3 \times 5,$$

premiers entre eux, ont pour plus petit multiple le nombre

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

qui est le produit même des deux nombres donnés.

Exercices.

1° Trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 182436 et 45234.

2° Trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 785000 et 465000.

3° Trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 53600 et 27000.

4° Trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 2734 et 1853.

5° Décomposer en facteurs premiers les nombres 132, 234, 340.

6° Trouver le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple de ces trois nombres.

7° Décomposer en facteurs premiers les nombres 453600, 2759680, 156816.

8° Trouver le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple de ces trois nombres.

9° Trouver quels sont les nombres premiers plus petits que mille.

10° Former un tableau contenant tous les diviseurs du nombre 360.

11° Former un tableau contenant tous les diviseurs du nombre 504.

12° Démontrer que le nombre des diviseurs d'un nombre est égal au produit des exposants des facteurs premiers qui composent ce nombre, chacun de ces exposants étant augmenté d'une unité.

13° Former un tableau contenant tous les diviseurs communs aux deux nombres 360 et 900.

14° Former un tableau contenant tous les diviseurs communs aux trois nombres 453600, 2759680, 156816.

15° A quels caractères reconnaît-on qu'un nombre est divisible par 18?

Appliquer aux nombres 2754, 13266, 5218, 4250.

16° A quels caractères reconnaît-on qu'un nombre est divisible par 45?

Appliquer aux nombres 2745, 7605, 2430, 6735.

17° Quels sont les nombres plus petits que 9, et premiers avec ce nombre?

18° Quels sont les nombres plus petits que 12 et premiers avec ce nombre?

LIVRE III.

DES FRACTIONS.

CHAPITRE I.

DES FRACTIONS ORDINAIRES.

Mesure des grandeurs.

106. On appelle *grandeur* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

Il faut distinguer deux sortes de grandeurs. Certaines grandeurs, comme une compagnie de soldats, un monceau de pommes, sont des collections d'unités ; si l'on compte combien de soldats renferme la compagnie, combien de pommes le monceau, on obtient un *nombre*. C'est là l'origine du nombre, et c'est à ce point de vue que nous l'avons étudié jusqu'à présent.

Il est d'autres grandeurs que l'on nomme *continues*, parce qu'on peut les augmenter ou les diminuer d'aussi peu qu'on veut ; la longueur d'un fil, la capacité d'un vase, la durée d'un phénomène, sont des grandeurs continues. Les grandeurs de cette nature ne renferment pas en elles l'idée de nombre ; cependant il est possible de les représenter par des nombres, et c'est là une première application très-importante de la science des nombres.

En effet, si l'on veut évaluer les longueurs, par exemple, on choisira l'une d'elles pour servir de terme de comparaison,

et l'on cherchera combien de fois cette longueur est contenue dans chacune des autres. Si elle est contenue 5 fois dans une première, 12 fois dans une seconde, ces longueurs seront représentées, l'une par le nombre 5, l'autre par le nombre 12.

107. On appelle *unité* la grandeur prise pour servir de terme de comparaison à toutes les grandeurs de même espèce.

Mesurer une grandeur, c'est la comparer à son unité ; c'est chercher combien d'unités et de parties d'unité elle renferme.

1° Lorsque l'unité est contenue exactement dans la grandeur, 5 fois par exemple, il n'y a pas de difficulté, la grandeur est exprimée par le nombre 5.

2° Lorsque la grandeur à mesurer est plus petite que l'unité, on partage cette dernière en un certain nombre de parties égales, et l'on cherche combien de parties renferme la grandeur. Je suppose que, l'unité ayant été partagée en douze parties égales, la grandeur renferme 7 parties exactement; on dira que la grandeur est les 7 *douzièmes* de l'unité, ou qu'elle est exprimée par la fraction SEPT *douzièmes*.

3° Lorsque la grandeur à mesurer est plus grande que l'unité, et qu'elle ne la contient pas exactement, elle se compose d'un certain nombre d'unités et d'un reste plus petit que l'unité, reste que l'on évalue par une fraction, ainsi qu'il a été expliqué. De cette manière, la grandeur est représentée par un nombre, augmenté d'une fraction.

Par extension d'idée, on appelle *nombre*, en général, la mesure d'une grandeur au moyen de l'unité ; le nombre proprement dit a été distingué par la qualification de *nombre entier ;* la fraction est considérée comme un nombre plus petit que l'unité; enfin un nombre entier, augmenté d'une fraction, constitue un *nombre fractionnaire*.

Les grandeurs, quand elles sont ainsi mesurées ou représentées par des nombres, portent le nom de *quantités*.

Je reprends en détail les définitions que je viens de donner.

Définitions.

108. *Lorsqu'on partage l'unité en plusieurs parties égales, et qu'on prend un certain nombre de ces parties, on a ce qu'on appelle une* FRACTION.

Je partage l'unité en cinq parties égales, et je prends trois de ces parties; j'ai la fraction TROIS *cinquièmes*.

Le nombre qui indique en combien de parties on a partagé l'unité s'appelle *dénominateur ;* le nombre qui indique combien on prend de parties s'appelle *numérateur*. Dans l'exemple précédent, 5 est le dénominateur, 3 le numérateur.

On énonce une fraction en disant d'abord le numérateur, puis le dénominateur, que l'on fait suivre de la terminaison *ième*.

On écrit une fraction en mettant le dénominateur au-dessous du numérateur, et séparant les deux nombres par un trait horizontal. Ainsi la fraction TROIS *cinquièmes* s'écrit

$$\frac{3}{5}.$$

De même, si l'on partage l'unité en trente-sept parties égales, et que l'on prenne vingt-quatre de ces parties, on aura la fraction VINGT-QUATRE *trente-septièmes*, qui s'écrit

$$\frac{24}{37}.$$

109. On appelle *nombre fractionnaire* un nombre entier augmenté d'une fraction. Ainsi $7+\frac{3}{5}$ est un nombre fractionnaire.

Il est aisé de mettre un nombre fractionnaire sous forme de fraction. Je remarque en effet que, puisqu'une unité vaut cinq *cinquièmes*, sept unités valent sept fois cinq *cinquièmes*, ou trente-cinq *cinquièmes ;* j'ajoute les trois *cinquièmes*, j'ai trente-huit *cinquièmes*. Ainsi :

$$7+\frac{3}{5}=\frac{38}{5}.$$

RÈGLE. *Pour mettre un nombre fractionnaire sous la forme d'une fraction ordinaire, on multiplie l'entier par le dénominateur de la fraction, et on ajoute au produit le numérateur.*

Puisqu'on peut mettre ainsi un nombre entier ou un nombre fractionnaire sous la forme d'une fraction, on a étendu la dénomination de fraction aux nombres en général. Lorsque le numérateur de la fraction est plus petit que le dénominateur, la fraction représente une quantité plus petite que l'unité; c'est une fraction proprement dite. Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction représente une quantité plus grande que l'unité; elle tient la place d'un nombre entier ou d'un nombre fractionnaire. Enfin, quand le numérateur est égal au dénominateur, la fraction désigne l'unité elle-même.

Je considère, par exemple, la fraction $\frac{38}{5}$. Puisque avec cinq *cinquièmes* on forme une unité, autant de fois 38 *cinquièmes* contiendront 5 *cinquièmes*, autant la fraction $\frac{38}{5}$ contiendra d'unités; or 38 contient 5 sept fois, et il reste 3; donc

$$\frac{38}{5}=7+\frac{3}{5}.$$

RÈGLE. *Pour extraire les entiers contenus dans une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, on divise le numérateur par le dénominateur.*

Propriétés fondamentales des fractions.

110. THÉORÈME I. *Lorsqu'on rend le numérateur d'une fraction un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, la fraction devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite.*

Il est évident que si, sans changer le dénominateur, on augmente le numérateur, la fraction augmente; car les parties restent les mêmes, et on en prend un plus grand nombre. Si on rend le numérateur deux, trois... fois plus grand, on prend un nombre de parties deux, trois... fois plus grand, ce qui donne une quantité deux, trois... fois plus grande. Ainsi, en

multipliant par 3 le numérateur de la fraction $\frac{4}{7}$, on prend un nombre de septièmes trois fois plus grand, ce qui donne une nouvelle fraction $\frac{12}{7}$, trois fois plus grande que la première.

111. Théorème II. *Lorsqu'on rend le dénominateur d'une fraction un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, la fraction devient le même nombre de fois plus petite ou plus grande.*

Si, sans changer le numérateur, on augmente le dénominateur, il est clair que la fraction diminue ; car, l'unité étant partagée en un plus grand nombre de parties égales, les parties deviennent plus petites, et comme on en prend le même nombre, on a une quantité plus petite.

Pour fixer les idées, je suppose que l'on multiplie par 3 le dénominateur de la fraction $\frac{4}{7}$, ce qui donne la fraction $\frac{4}{21}$. Pour former la première fraction $\frac{4}{7}$, on a partagé l'unité en sept parties égales ; je subdivise chacune de ces parties en trois parties égales; l'unité se trouve divisée de la sorte en 7 fois 3, ou en 21 parties égales. Avec un seul *septième* on a formé par ce moyen trois *vingt et unièmes ;* le *vingt et unième* est donc trois fois plus petit que le *septième;* et, comme on prend le même nombre de parties de part et d'autre, la seconde fraction est trois fois plus petite que la première.

En divisant par 3 le dénominateur de la fraction $\frac{4}{21}$, on obtient une fraction $\frac{4}{7}$, trois fois plus grande que la première.

112. Théorème III. *Quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre les deux termes d'une fraction, la valeur de la fraction ne change pas.*

Supposons que l'on multiplie par un même nombre 3 les deux termes de la fraction $\frac{4}{7}$. Si l'on multiplie d'abord le numérateur par 3, on obtient une fraction $\frac{4\times3}{7}$, trois fois plus grande que la première; si l'on multiplie ensuite le dénominateur de cette seconde fraction par 3, on obtient une troisième fraction $\frac{4\times3}{7\times3}$, trois fois plus petite que la seconde; donc cette dernière fraction $\frac{4\times3}{7\times3}$ ou $\frac{12}{21}$ est égale à la première $\frac{4}{7}$. En un

mot, on voit que la fraction, devenant d'abord trois fois plus grande, puis trois fois plus petite, reprend sa valeur primitive. Ainsi, la valeur d'une fraction ne change pas quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.

Supposons maintenant que l'on divise par un même nombre 3 les deux termes de la fraction $\frac{12}{21}$. Si l'on divise d'abord par 3 le numérateur, on obtient une seconde fraction $\frac{4}{21}$, trois fois plus petite que la première; si l'on divise ensuite par 3 le dénominateur de cette seconde fraction, on obtient une troisième fraction $\frac{4}{7}$, trois fois plus grande que la seconde; donc cette dernière fraction $\frac{4}{7}$ est égale à la première $\frac{12}{21}$. En un mot, on voit que la fraction, devenant d'abord trois fois plus petite, puis trois fois plus grande, reprend sa valeur primitive. Ainsi, la valeur d'une fraction ne change pas quand on divise ses deux termes par un même nombre.

Simplification des fractions.

113. Plus une fraction est simple, plus l'esprit conçoit aisément la grandeur qu'elle représente; ainsi on se figure parfaitement les quantités $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$; mais si la fraction est compliquée, comme $\frac{720}{1620}$, on a plus de peine à concevoir la grandeur qu'elle représente. Il importe donc de simplifier les fractions autant que possible. Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale à la fraction proposée, et composée de termes plus petits. Le théorème III nous fournit immédiatement un procédé de simplification; toutes les fois que l'on apercevra un diviseur commun aux deux termes d'une fraction, on divisera ces deux termes par le diviseur commun, et l'on obtiendra de la sorte une fraction égale à la proposée et plus simple qu'elle.

Soit la fraction $\frac{720}{1620}$. En divisant les deux termes d'abord par 10, puis par 2 et par 9, on forme une série de fractions égales :

$$\frac{720}{1620},\quad \frac{72}{162},\quad \frac{36}{81},\quad \frac{4}{\ }$$

Ainsi la fraction proposée est égale à la fraction plus simple $\frac{4}{9}$.

Puisque cette dernière a ses deux termes premiers entre eux, on ne peut plus la simplifier par division; mais il n'est pas évident qu'on ne puisse le faire par un autre procédé, en retranchant, par exemple, de ses deux termes des nombres convenables. Il importe donc de rechercher à quels caractères on reconnaît qu'une fraction est *irréductible*, c'est-à-dire ne peut être exprimée par des termes plus simples.

114. THÉORÈME IV. *Toute fraction, égale à une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, a ses deux termes équi-multiples des deux termes de la fraction proposée.*

Soit la fraction $\frac{4}{9}$ dont les deux termes sont premiers entre eux ; je désigne par $\frac{a}{b}$ une fraction égale à la proposée. Je multiplie par b les deux termes de la première, par 9 les deux termes de la seconde : les deux fractions ne changent pas de valeur et se mettent sous la forme

$$\frac{4\times b}{9\times b},\quad \frac{a\times 9}{b\times 9}.$$

Ces fractions, étant égales et ayant même dénominateur, doivent avoir nécessairement même numérateur; on aura donc

$$4\times b = a\times 9.$$

Le nombre 9, divisant le produit $a\times 9$, doit diviser le produit égal $4\times b$; mais il est premier avec le facteur 4; donc il divise l'autre facteur b. Ainsi le nombre b est un certain multiple de 9, multiple que l'on peut représenter par $9\times q$ (q étant un nombre entier quelconque). Si, dans l'égalité précédente, on remplace b par le nombre égal $9\times q$, on a

$$4\times 9\times q = a\times 9.$$

Si l'on divise maintenant par 9 de part et d'autre, on a

$$4\times q = a \quad\text{ou}\quad a = 4\times q.$$

Ainsi les deux nombres a et b sont les produits de 4 et de 9 par un même nombre q, ce que l'on exprime en disant que les nombres a et b sont des équi-multiples des deux termes 4 et 9 de la fraction proposée.

115. Théorème V. *Une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est irréductible.*

En effet, nous venons de démontrer que les deux termes de toute fraction égale à la fraction proposée sont des multiples des termes de celle-ci, et par conséquent sont plus grands que ces termes; il n'existe donc pas de fraction égale à la fraction donnée et formée de termes plus simples; en un mot, la fraction donnée est irréductible.

116. Corollaire I. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.*

En effet, si l'on divise les deux termes de la fraction proposée par leur plus grand commun diviseur, on obtient deux quotients premiers entre eux; la nouvelle fraction, égale à la fraction proposée, est donc irréductible.

Ainsi, en divisant les deux termes de la fraction $\frac{720}{1620}$ par leur plus grand commun diviseur 180, on arrive tout d'un coup à la fraction irréductible $\frac{4}{9}$, que nous avons trouvée précédemment par des divisions successives.

Dans la pratique, au lieu de chercher le plus grand commun diviseur, il est préférable en général de supprimer successivement tous les facteurs communs que l'on aperçoit dans les deux termes de la fraction; quand il n'y a plus de facteur commun, les deux termes sont premiers entre eux, et la fraction réduite à sa plus simple expression.

Exemples :

$$\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{18}{30}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{36}{54}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{525}{750}=\frac{105}{150}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}.$$

On a divisé les deux termes de la première fraction deux fois

par 2, ceux de la seconde par 2 et par 3, ceux de la troisième par 2 et par 9, ceux de la quatrième deux fois par 5, puis par 3.

117. Corollaire II. Deux fractions irréductibles ne peuvent être égales à moins d'être composées des mêmes termes identiquement. Ainsi, quel que soit le procédé que l'on emploie pour simplifier une fraction, on arrivera toujours au même résultat final.

118. Corollaire III. Quand on donne une fraction irréductible $\frac{4}{9}$, il est facile de former toutes les fractions qui lui sont égales; il suffit pour cela de multiplier ses deux termes par chacun des nombres consécutifs 2, 3, 4.... Ces fractions égales forment donc une série indéfinie

$$\frac{4}{9}, \frac{4\times2}{9\times2}, \frac{4\times3}{9\times3}, \frac{4\times4}{9\times4}, \ldots\ldots;$$

toutes ces fractions représentent la même quantité.

Étant donnée l'une de ces fractions, par exemple $\frac{20}{45}$, on obtiendra toutes les fractions égales en augmentant ou en diminuant ses deux termes de deux équi-multiples des termes de la fraction irréductible égale $\frac{4}{9}$.

Réduction des fractions au même dénominateur.

119. On compare aisément des fractions qui ont même dénominateur, comme $\frac{5}{12}$ et $\frac{7}{12}$. Puisqu'on a des parties égales, des douzièmes, de part et d'autre, il suffit de comparer les numérateurs; dans l'exemple précédent, on voit immédiatement que c'est la seconde fraction qui est la plus grande. On comprend par là combien il est utile de savoir réduire les fractions au même dénominateur, c'est-à-dire de savoir trouver des fractions respectivement égales à des fractions données et ayant même dénominateur.

Je considère d'abord deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$. Si l'on multiplie les deux termes de la première par le dénominateur 7 de la seconde, on obtient la fraction égale $\frac{3\times7}{5\times7}$. En multipliant de

même les deux termes de la seconde fraction par le dénominateur 5 de la première, on obtient la fraction égale $\frac{4\times5}{7\times5}$. Or les dénominateurs des deux nouvelles fractions sont égaux, comme produits des deux mêmes facteurs. Ainsi les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{21}{35}$ et $\frac{20}{35}$.

RÈGLE. ***Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre.***

120. Je considère maintenant un nombre quelconque de fractions

$$\frac{3}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{4}{7},\quad \frac{10}{11}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de chacune d'elles successivement par les dénominateurs de toutes les autres, on obtient les fractions

$$\frac{3\times6\times7\times11}{5\times6\times7\times11},\ \frac{5\times7\times11}{6\times5\times7\times11},\ \frac{4\times5\times6\times11}{7\times5\times6\times11},\ \frac{10\times5\times6\times7}{11\times5\times6\times7},$$

respectivement égales aux fractions proposées et ayant même dénominateur. Ce dénominateur commun est le produit des dénominateurs des fractions proposées.

RÈGLE. ***Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.***

Dans l'exemple proposé, le dénominateur commun est 2310, et il faut multiplier les numérateurs respectivement par 462, 385, 330, 210, ce qui donne

$$\frac{1386}{2310},\quad \frac{385}{2310},\quad \frac{1320}{2310},\quad \frac{2100}{2310}.$$

Plus petit commun dénominateur.

121. Il est possible ordinairement d'abréger beaucoup les calculs. En effet, puisqu'on transforme chacune des fractions données en multipliant ses deux termes par un certain nombre, le commun dénominateur est un multiple commun de tous les dénominateurs; et, réciproquement, tout multiple commun peut servir de commun dénominateur. La question revient donc à la détermination d'un multiple commun des dénominateurs des fractions proposées; on prendra de préférence le plus petit multiple. Il en résulte que, *pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, il suffit de chercher le plus petit multiple de tous les dénominateurs, et de prendre ce plus petit multiple pour dénominateur commun.*

Exemple I. : Soient les fractions

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{13}{18}, \quad \frac{5}{36}.$$

Ici le plus grand dénominateur 36 est divisible exactement par chacun des autres; c'est le plus petit multiple; on le prendra pour dénominateur commun. Ce nombre 36, divisé par 12 et par 18, donne pour quotients 3 et 2; on multipliera le numérateur de la première fraction par 3, celui de la seconde par 2, et l'on obtiendra les fractions

$$\frac{21}{36}, \quad \frac{26}{36}, \quad \frac{5}{36}.$$

II. Soient les fractions

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{13}{18}, \quad \frac{19}{24}, \quad \frac{5}{36}.$$

Le plus grand dénominateur 36 est divisible par les deux premiers dénominateurs; mais il ne l'est pas par le troisième 24; il suffit de chercher un multiple de 36 divisible par 24. On voit de suite que 36×2 ou 72 est divisible par 24; ce nombre 72 est donc le plus petit multiple; on le prendra pour

dénominateur commun. Les fractions proposées deviennent ainsi

$$\frac{42}{72},\quad \frac{52}{72},\quad \frac{57}{72},\quad \frac{10}{72}.$$

III. Mais on n'aperçoit pas toujours immédiatement un multiple du plus grand dénominateur divisible par tous les autres ; dans ce cas on procédera à la recherche du plus petit multiple par la décomposition en facteurs premiers. Je vais indiquer sur un exemple la manière de disposer les calculs :

fractions proposées.		plus petit multiple.		fractions réduites au même dénom.
$\frac{7}{20}$	$20=2^2.5$		$2.3^2=18$	$\frac{126}{360}$
$\frac{11}{24}$	$24=2^3.3$	$2^3.3^2.5=360$	$3.5=15$	$\frac{165}{360}$
$\frac{23}{36}$	$36=2^2.3^2$		$2.5=10$	$\frac{230}{360}$
$\frac{17}{45}$	$45=3^2.5$		$2^3=8$	$\frac{136}{360}$

Après avoir décomposé les dénominateurs en facteurs premiers et écrit leur plus petit multiple, on a calculé les quotients du plus petit multiple par chacun des dénominateurs; c'est par ces nombres 18, 15, 10, 8, qu'il faudra multiplier les numérateurs.

Si l'on avait opéré d'après la première méthode, on aurait pris pour dénominateur commun le produit 777600 des dénominateurs, nombre beaucoup plus grand que 360.

Il est un cas où la seconde méthode revient à la première; c'est lorsque les dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux; alors le plus petit multiple n'est autre chose que le produit même des dénominateurs.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS ORDINAIRES.

Addition.

122. Les définitions données pour l'addition et la soustraction des nombres entiers s'appliquent aux quantités en général. *L'addition a pour but de réunir en une seule plusieurs quantités de même espèce. La soustraction a pour but de retrancher une quantité d'une autre quantité plus grande de même espèce.* Si, par exemple, on place à la suite les unes des autres plusieurs longueurs données, on fait une addition.

Lorsque les fractions données ont même dénominateur, on a des parties égales à additionner ; pour trouver combien de parties renferme la somme, il suffit évidemment d'additionner les numérateurs. Soit à ajouter les fractions $\frac{3}{12}$ et $\frac{4}{12}$; si l'on ajoute 3 *douzièmes* à 4 *douzièmes* on a 7 *douzièmes*, c'est-à-dire la fraction $\frac{7}{12}$.

Soit encore à additionner les fractions

$$\frac{3}{4},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{7}{12}.$$

On commencera par les réduire au même dénominateur 36, puis on ajoutera les numérateurs, ce qui donne

$$\frac{27}{36}+\frac{6}{36}+\frac{20}{36}+\frac{21}{36}=\frac{74}{36}=2+\frac{2}{36}=2+\frac{1}{18}.$$

Règle. ***Pour additionner des fractions, on les réduit au même dénominateur, puis on additionne les numérateurs.***

Pour additionner des nombres fractionnaires, on additionne d'abord les fractions, puis les entiers, en tenant compte du nombre entier fourni par la somme des fractions. Soit à ajouter les nombres fractionnaires

$$10+\frac{3}{4},\quad 7+\frac{1}{6},\quad \frac{5}{9},\quad 1+\frac{7}{12}.$$

Les fractions, réduites au même dénominateur 36, ont pour somme $\frac{74}{36}$, ou $2+\frac{2}{36}$, ou $2+\frac{1}{18}$. La partie entière 2 ajoutée aux entiers donne 20. La somme cherchée est donc $20+\frac{1}{18}$.

Soustraction.

123. Lorsque les deux fractions ont même dénominateur, on retranche le plus petit numérateur du plus grand. De $\frac{7}{12}$ retrancher $\frac{4}{12}$. Si de 7 *douzièmes* on retranche 4 *douzièmes*, il reste 3 *douzièmes*, c'est-à-dire la fraction $\frac{3}{12}$.

Lorsque les fractions n'ont pas même dénominateur, on les réduit préalablement au même dénominateur. Ainsi :

$$\frac{11}{12}-\frac{4}{9}=\frac{33}{36}-\frac{16}{36}=\frac{17}{36}.$$

Règle. *Pour trouver la différence de deux fractions, on les réduit au même dénominateur, puis on prend la différence des numérateurs.*

Pour retrancher un nombre fractionnaire d'un nombre fractionnaire, on réduit d'abord les deux fractions au même dénominateur, puis on retranche la fraction de la fraction et l'entier de l'entier.

Exemples : I. De $20+\frac{11}{12}$ retrancher $6+\frac{4}{9}$.

$$\begin{array}{r} 20+\frac{33}{36} \\ 6+\frac{16}{36} \\ \hline 14+\frac{17}{36}. \end{array}$$

II. De $20+\frac{4}{9}$ retrancher $6+\frac{11}{12}$.

$$\begin{array}{r} 20+\dfrac{16}{36} \\ 6+\dfrac{33}{36} \\ \hline 13+\dfrac{19}{36}. \end{array}$$

Ici la fraction inférieure est plus grande que la fraction supérieure. On ajoute à cette dernière une unité ou $\frac{36}{36}$, ce qui donne $\frac{52}{36}$; de $\frac{52}{36}$ ôtez $\frac{33}{36}$, il reste $\frac{19}{36}$. Pour que la différence ne change pas, on ajoute une unité au nombre 6; de 20 ôtez 7, il reste 13.

III. De 1 retrancher $\frac{4}{9}$.

$$1-\frac{4}{9}=\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}.$$

IV. De $\frac{14}{9}$ retrancher 1.

$$\frac{14}{9}-1=\frac{14}{9}-\frac{9}{9}=\frac{14-9}{9}=\frac{5}{9}.$$

Changement qu'éprouve une fraction quand on ajoute un même nombre à ses deux termes.

123. Je considère d'abord une fraction plus petite que l'unité, $\frac{4}{9}$ par exemple. Si l'on ajoute à ses deux termes le même nombre a, on obtient une nouvelle fraction $\frac{4+a}{9+a}$ qui est elle-même plus petite que l'unité, puisque le numérateur reste toujours plus petit que le dénominateur. Mais la différence des termes ne change pas. Si donc on prend l'excès de l'unité sur chacune de ces deux fractions, les deux différences $\frac{5}{9}$ et $\frac{5}{9+a}$ ont même numérateur; mais le dénominateur de la seconde est plus grand que le dénominateur de la première; la seconde différence est donc plus petite que la première. Il en résulte que la fraction $\frac{4+a}{9+a}$ est plus rapprochée de l'unité que la fraction $\frac{4}{9}$ et par conséquent cette fraction est plus grande que la fraction proposée. Ainsi, quand on ajoute un même

nombre aux deux termes d'une fraction plus petite que l'unité, la fraction augmente.

Si l'on ajoute aux deux termes de la fraction des nombres de plus en plus grands, on obtient une série de fractions croissantes, et qui s'approchent de l'unité autant qu'on veut, en restant constamment moindres que l'unité.

Les mêmes raisonnements peuvent être appliqués à une fraction plus grande que l'unité. Si l'on ajoute un même nombre aux deux termes, la fraction se rapproche encore de l'unité, mais alors elle diminue. Et, si l'on ajoute aux deux termes des nombres de plus en plus grands, on aura une série de fractions décroissantes, et se rapprochant de l'unité autant qu'on voudra, tout en restant constamment supérieures à l'unité.

C'est ici le lieu d'introduire une idée qui joue un grand rôle en mathématiques, l'idée de *limite*. Lorsqu'une quantité *variable* s'approche indéfiniment d'une quantité *fixe*, de manière que la différence devienne aussi petite que l'on veut, la quantité fixe s'appelle la *limite* de la quantité variable. Ce qui précède nous en donne un premier exemple : si aux deux termes d'une fraction donnée on ajoute un même nombre de plus en plus grand, la fraction variable ainsi obtenue se rapproche de l'unité, de manière que la différence devienne aussi petite que l'on veut ; l'unité est donc la limite de la fraction variable.

Si la fraction d'où l'on part est plus petite que l'unité, la fraction variable tend vers sa limite en croissant ; si elle est plus grande que l'unité, en décroissant.

Multiplication.

Cas où le multiplicateur est entier.

124. La définition que nous avons donnée de la multiplication subsiste dans le cas où le multiplicateur est un nombre entier, le multiplicande étant d'ailleurs une quantité quelconque. *Multiplier une quantité par un nombre entier, c'est la*

répéter autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre entier. Multiplier une longueur par 4, c'est la répéter quatre fois, c'est ajouter à la suite les unes des autres quatre longueurs égales à la longueur donnée.

Soit à multiplier par 4 la fraction $\frac{5}{7}$. Il s'agit de répéter 4 fois le multiplicande ; 4 fois 5 *septièmes* font 20 *septièmes,* c'est-à-dire la fraction $\frac{20}{7}$. Ainsi, *on multiplie une fraction par un nombre entier en multipliant le numérateur par ce nombre entier.*

De même le produit de $\frac{5}{12}$ par 4 est $\frac{5\times4}{12}$; mais on peut simplifier cette fraction en divisant ses deux termes par 4, ce qui donne $\frac{5}{3}$ pour le produit demandé. On serait arrivé directement à ce résultat en remarquant qu'on rend la fraction $\frac{5}{12}$ quatre fois plus grande en divisant son dénominateur par 4.

Si l'on avait à multiplier un nombre fractionnaire par un nombre entier, on multiplierait d'abord la fraction, puis la partie entière, en ajoutant au produit les unités fournies par la fraction. Ainsi :

$$\left(3+\frac{5}{7}\right)\times 4 = 14+\frac{6}{7}.$$

On opère en disant : 4 fois $\frac{5}{7}$ font $\frac{20}{7}$ ou $2+\frac{6}{7}$; je pose $\frac{6}{7}$ et retiens 2 unités ; 4 fois 3 font 12 et 2 font 14.

Cas où le multiplicateur est fractionnaire.

125. La définition de la multiplication, dont nous nous sommes servis jusqu'à présent, n'a plus de sens quand le multiplicateur est fractionnaire ; il devient nécessaire de donner à cette définition une signification plus étendue. Nous dirons :

Multiplier, c'est répéter plusieurs fois une partie déterminée du multiplicande.

Ainsi, multiplier par $\frac{3}{5}$, c'est répéter 3 fois la cinquième partie du multiplicande. Multiplier par $\frac{1}{5}$, c'est prendre la cinquième partie du multiplicande.

Cette définition nouvelle ne comporte plus nécessairement

l'idée d'augmentation. Si le multiplicateur est plus grand que l'unité, le produit sera en effet plus grand que le multiplicande; mais, si le multiplicateur est plus petit que l'unité, le produit sera plus petit que le multiplicande. La multiplication, ainsi entendue, n'est plus une opération simple, elle contient une double opération : 1° division du multiplicande en parties égales; 2° répétition d'une des parties. C'est la combinaison d'une division et d'une multiplication proprement dites.

Expliquons maintenant pourquoi cette double opération a été appelée multiplication. Proposons-nous la question suivante : Combien coûte une certaine quantité d'étoffe, connaissant le prix du mètre? Si la quantité d'étoffe est un nombre entier de mètres, 3 mètres, par exemple, il faut répéter le prix du mètre 3 fois; c'est là une multiplication dans l'acception ordinaire du mot. Si l'on demande maintenant combien coûtent $\frac{3}{5}$ de mètre, il faudra répéter 3 fois la cinquième partie du prix d'un mètre. L'opération qu'il faut faire dans ce cas, pour trouver le prix de la quantité d'étoffe, a été appelée, par analogie, *multiplication*. Supposons que le prix du mètre soit 10 francs; le cinquième du mètre coûtera 5 fois moins, soit 2 francs; trois cinquièmes de mètre coûteront 3 fois plus, soit 6 francs.

Supposons maintenant que le prix du mètre soit $\frac{4}{7}$ de franc. Le cinquième du mètre coûtera 5 fois moins, soit $\frac{4}{7\times5}$; trois cinquièmes de mètre coûteront 3 fois plus, soit $\frac{4\times3}{7\times5}$.

126. Reprenons ce raisonnement d'une manière abstraite. Soit à multiplier $\frac{4}{7}$ par $\frac{3}{5}$. Il s'agit de répéter *trois* fois la *cinquième* partie du multiplicande. On obtient la *cinquième* partie du multiplicande en multipliant le dénominateur par 5, ce qui rend la fraction cinq fois plus petite, et donne $\frac{4}{7\times5}$; on répète ensuite *trois* fois cette partie en multipliant le numérateur par 3. Le produit cherché est donc $\frac{4\times3}{7\times5}$ ou $\frac{12}{35}$. Ainsi :

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{7\times5}=\frac{12}{35}.$$

RÈGLE. *Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur.*

Remarques.

127. Tous les cas qui peuvent se présenter se ramènent au précédent.

Si l'on a à multiplier un nombre entier par une fraction, en mettant le nombre entier sous la forme d'une fraction qui a pour dénominateur l'unité, on aura

$$4\times\frac{3}{5}=\frac{4}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}.$$

On serait d'ailleurs arrivé au même résultat en prenant directement les trois cinquièmes du multiplicande.

Si l'on veut multiplier un nombre fractionnaire par une fraction ou par un nombre fractionnaire, on mettra préalablement les nombres fractionnaires sous la forme de fractions. Ainsi :

$$\left(8+\frac{4}{7}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{60}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{180}{35}=\frac{36}{7}=5+\frac{1}{7}.$$

$$\left(8+\frac{4}{7}\right)\times\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{60}{7}\times\frac{8}{5}=\frac{480}{35}=\frac{96}{7}=13+\frac{5}{7}.$$

128. Les propriétés des produits de plusieurs facteurs, que nous avons démontrées, lorsque les facteurs sont entiers (liv. II, ch. I), subsistent quand les facteurs sont fractionnaires. J'examine d'abord la propriété fondamentale, savoir : le produit ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs. Le produit

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}=\frac{3\times5\times8\times7}{4\times7\times9\times10}$$

est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs. Or, si l'on intervertit l'ordre des facteurs fractionnaires, on intervertit simplement l'ordre des facteurs entiers qui composent

les deux termes de la fraction-produit, ce qui ne change pas la valeur de ces deux termes.

La propriété fondamentale étant ainsi généralisée, toutes ses conséquences le sont par là même. Ainsi, dans un produit de facteurs quelconques, on peut grouper deux facteurs en un seul, et réciproquement décomposer un facteur en plusieurs autres.

Lorsqu'on aura à calculer un produit de fractions, on aura soin de supprimer les facteurs communs avant de commencer les multiplications. Ainsi, dans le produit précédent, on aperçoit au numérateur et au dénominateur les facteurs communs 7, 4, 3, 10, que l'on supprime; de cette manière on obtient immédiatement le résultat sous la forme la plus simple $\frac{1}{3}$.

Division.

120. Voici la définition générale de la division : ***Étant donnés deux nombres, nommés, l'un dividende, l'autre diviseur, trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur reproduise le dividende.***

Lorsque nous nous sommes occupés de la division des nombres entiers, nous avons considéré la division comme ayant pour but de chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Lorsque le dividende contient exactement le diviseur, le quotient est entier.

Mais, quand le diviseur n'est pas contenu exactement dans le dividende, le quotient est fractionnaire. Soit d'abord à diviser 5 par 7; le quotient sera exprimé par la *fraction* $\frac{5}{7}$; car le produit du diviseur 7 par la fraction $\frac{5}{7}$ est égal à cinq fois la septième partie du diviseur 7, ou à cinq fois l'unité, ce qui donne le dividende 5. Ainsi, *une fraction exprime le quotient de son numérateur par son dénominateur*; c'est pourquoi le signe de la fraction, le trait horizontal, a été adopté pour indiquer la division; on place au-dessus le dividende, au-dessous le diviseur.

Soit encore à diviser 31 par 7; le diviseur est contenu quatre

fois dans le dividende, et il y a un reste 3. Comme le reste 3, divisé par 7, donne la fraction $\frac{3}{7}$, le quotient cherché sera exprimé par le nombre fractionnaire $4+\frac{3}{7}$; car si l'on multiplie le diviseur par ce nombre fractionnaire, on a 4 fois 7, plus trois fois la septième partie de 7, c'est-à-dire plus le reste 3, et l'on reproduit le dividende. Dans la division des nombres entiers, nous nous bornions à chercher la partie entière du quotient; pour compléter le quotient, il suffit d'ajouter une fraction ayant pour numérateur le reste de la division et pour dénominateur le diviseur.

Cas où le diviseur est entier.

130. Soit à diviser la fraction $\frac{4}{7}$ par 3. Puisque le quotient, multiplié par le diviseur 3, ou répété 3 fois, doit reproduire le dividende, ce quotient est trois fois plus petit que le dividende. Or, on sait que l'on rend une fraction trois fois plus petite en multipliant son dénominateur par 3; le quotient cherché est donc $\frac{4}{7\times 3}$ ou $\frac{4}{21}$. Ainsi, *on divise une fraction par un nombre entier en multipliant le dénominateur de la fraction par ce nombre entier.*

Quand le numérateur de la fraction est divisible par le nombre entier, on effectue la division d'une manière plus prompte, en divisant le numérateur par le nombre entier. Par exemple, le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$ par 3 est la fraction $\frac{2}{7}$. Car on sait que l'on rend une fraction trois fois plus petite en divisant son numérateur par 3.

Soit à diviser le nombre fractionnaire $17+\frac{4}{7}$ par 5. On dira: le cinquième de 17 est 3 pour 15 et il reste deux unités, qui, converties en septièmes et ajoutées aux quatre septièmes, donnent $\frac{18}{7}$; le cinquième de cette fraction est $\frac{18}{35}$. Le quotient cherché est donc $3+\frac{18}{35}$.

Cas où le diviseur est fractionnaire.

131. Proposons-nous d'abord la question suivante: $\frac{5}{8}$ de mètre d'étoffe ont coûté 15 francs; trouver le prix du mètre?

Puisque 5 *huitièmes* de mètre ont coûté 15 francs, un seul *huitième* coûtera cinq fois moins, c'est-à-dire 3 francs; un mètre coûtera huit fois plus qu'un *huitième*, c'est-à-dire 3×8 ou 24 francs.

Proposons-nous encore cette question: $\frac{5}{8}$ de mètre d'étoffe ont coûté $\frac{7}{12}$ de franc, trouver le prix du mètre? Puisque 5 *huitièmes* de mètre ont coûté $\frac{7}{12}$ de franc, un seul *huitième* coûtera 5 fois moins, c'est-à-dire $\frac{7}{12 \times 5}$; un mètre coûtera 8 fois plus qu'un *huitième*, c'est-à-dire $\frac{7 \times 8}{12 \times 5}$. Or cette opération est une division dans laquelle $\frac{7}{12}$ est le dividende, $\frac{5}{8}$ le diviseur, le prix du mètre le quotient; car le prix du mètre, multiplié par la quantité d'étoffe achetée $\frac{5}{8}$, doit reproduire la somme dépensée $\frac{7}{12}$ de franc.

132. Reprenons maintenant le raisonnement d'une manière abstraite. Diviser $\frac{7}{12}$ par $\frac{5}{8}$, c'est chercher un quotient qui, multiplié par le diviseur $\frac{5}{8}$, reproduise le dividende $\frac{7}{12}$. Mais multiplier une quantité par $\frac{5}{8}$, c'est en prendre 5 fois la *huitième* partie; donc les 5 *huitièmes* du quotient égalent le dividende $\frac{7}{12}$; un seul *huitième* vaut 5 fois moins, c'est-à-dire $\frac{7}{12 \times 5}$; le quotient entier vaut 8 fois plus que son huitième, c'est-à-dire $\frac{7 \times 8}{12 \times 5}$ ou $\frac{56}{60}$. Tel est le quotient demandé; on l'obtient, comme on voit, en multipliant le dividende $\frac{7}{12}$ par le diviseur renversé $\frac{8}{5}$. D'où l'on déduit la règle suivante :

RÈGLE. *On divise une quantité par une fraction en la multipliant par le diviseur renversé.*

Remarques.

133. La règle précédente comprend tous les cas de la division. Lorsque le diviseur est un nombre entier, 5 par exemple, le quotient égale la cinquième partie du dividende, ou le produit du dividende par la fraction $\frac{1}{5}$; or cette fraction $\frac{1}{5}$ peut être considérée comme le nombre entier $\frac{5}{1}$ renversé.

De même, diviser par $\frac{1}{5}$, c'est la même chose que multiplier par 5.

Si le diviseur et le dividende sont des nombres fractionnaires, on les mettra préalablement sous forme de fractions.

$$\frac{5+\frac{4}{9}}{\frac{7}{12}}=\frac{49}{9}\times\frac{12}{7}=\frac{28}{3}=9+\frac{1}{3},$$

$$\frac{12}{1+\frac{3}{5}}=12\times\frac{5}{8}=\frac{60}{8}=\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2},$$

$$\frac{4+\frac{1}{6}}{5+\frac{5}{8}}=\frac{25}{6}\times\frac{8}{45}=\frac{20}{27}.$$

134. De même que, par l'extension donnée à la définition, la multiplication ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation, de même la division ne comporte plus l'idée de diminution. Puisque diviser revient à multiplier par le diviseur renversé, on voit que, si le diviseur est plus grand que l'unité, le quotient sera plus petit que le dividende, mais que, si le diviseur est plus petit que l'unité, le quotient sera plus grand que le dividende.

135. On se fera une idée très-nette de la division en remarquant que, dans tous les cas, *le quotient exprime combien de fois le dividende contient le diviseur et combien de parties du diviseur*. Si le quotient est un nombre entier 5, le dividende, étant égal au produit du diviseur par le quotient 5, ou au diviseur répété 5 fois, contient évidemment 5 fois le diviseur. Si le quotient est une fraction $\frac{3}{5}$, le dividende, étant égal au diviseur multiplié par $\frac{3}{5}$, contient trois fois la cinquième partie du diviseur. De même, un quotient fractionnaire $4+\frac{3}{5}$ indique que le dividende contient quatre fois le diviseur, plus trois fois la cinquième partie du diviseur. En un mot, *le quotient exprime la mesure de la quantité dividende, quand on prend la quantité diviseur pour unité*, ou, ce qui est la même chose, le *rapport* de la quantité dividende à la quantité diviseur.

D'après cela, il est clair que, si l'on rend le dividende un certain nombre de fois plus grand, le quotient devient le même nombre de fois plus grand, et que, si l'on rend le diviseur un

certain nombre de fois plus grand, le quotient devient le même nombre de fois plus petit. Il en résulte que le quotient ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre.

136. Lorsque le diviseur est un nombre entier, on peut considérer la division comme ayant pour but de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur. Supposons, par exemple, que le diviseur soit le nombre entier 5; le quotient, multiplié par le diviseur 5, ou répété 5 fois, reproduit le dividende; donc le dividende se compose de 5 quantités égales au quotient, et par conséquent, si l'on partage le dividende en 5 parties égales, chacune des parties sera égale au quotient.

Commune mesure de deux grandeurs.

137. Lorsqu'une grandeur est contenue exactement dans deux grandeurs de même espèce, on dit qu'elle est une *commune mesure des deux grandeurs*.

On détermine la plus grande commune mesure de deux grandeurs de la même manière que le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. J'appelle A et B les deux grandeurs; je cherche combien de fois la plus grande A contient la plus petite B; elle la contient, par exemple, 2 fois, plus un reste R; on démontrera que les communes mesures de A et de B sont les mêmes que celles de B et de R. Je cherche combien de fois B contient R; elle la contient, par exemple, 3 fois, plus un reste R'. Je cherche combien de fois R contient R'; elle la contient, par exemple, une fois, plus un reste R''. Je continue de cette manière jusqu'à ce que j'arrive à un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent; le dernier reste obtenu est la plus grande commune mesure cherchée. Si, par exemple, R' contient 4 fois exactement R'', ce dernier reste R'' est la plus grande commune mesure des grandeurs A et B.

Les divisions successives donnent:

$$A = 2B + R,$$
$$B = 3R + R'$$
$$R = R' + R''$$
$$R' = 4R''.$$

En remontant de proche en proche, on trouve

$$R = 5R''$$
$$B = 19R''$$
$$A = 43R''.$$

La plus grande commune mesure R'' est contenue exactement 19 fois dans B, 43 fois dans A. Le rapport de la grandeur A à la grandeur B est exprimé par la fraction $\frac{43}{19}$; et en effet, la grandeur A contient 43 fois R'', c'est-à-dire 43 fois la dix-neuvième partie de B. Le rapport de B à A est exprimé par la fraction inverse $\frac{19}{43}$.

Grandeurs incommensurables.

138. Il arrive quelquefois que, quelque loin que l'on pousse l'opération, on n'arrive jamais à une division rigoureusement exacte (on démontre en géométrie qu'il en est ainsi pour la diagonale et le côté du carré); dans ce cas, les deux grandeurs n'admettent pas de commune mesure, et sont dites *incommensurables entre elles.*

Il est impossible de trouver exactement le rapport de deux grandeurs incommensurables A et B; mais on peut l'obtenir avec une approximation aussi grande qu'on veut. Je partage, par exemple, la grandeur B en mille parties égales, et je cherche combien de fois la grandeur A contient l'une de ces parties. Je suppose qu'elle la contienne 723 fois, plus un reste plus petit que cette partie. Il est clair que le rapport de A à B est plus grand que $\frac{723}{1000}$, mais plus petit que $\frac{724}{1000}$; on peut donc représenter approximativement le rapport cherché par l'une ou l'autre de ces deux fractions; l'erreur commise est plus petite qu'un millième.

Mesurer une grandeur, c'est chercher le rapport de cette grandeur à l'unité. S'il existe une commune mesure entre la

grandeur et l'unité, la grandeur est dite *commensurable*; on peut la représenter exactement par un nombre, entier ou fractionnaire. S'il n'existe pas de commune mesure entre la grandeur et l'unité, on dit que la grandeur est *incommensurable;* il est impossible de l'exprimer exactement; on se borne alors à une évaluation approximative, ce qui suffit dans la pratique.

On a coutume d'appeler *nombre incommensurable* le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable avec une approximation aussi grande qu'on veut.

Exercices.

1° Combien coûtent 15 mètres et $\frac{7}{12}$ de mètre d'étoffe à raison de 18 francs le mètre?

On obtient d'abord le prix de 15 mètres d'étoffe en répétant 15 fois le prix du mètre; on obtient ensuite le prix de $\frac{7}{12}$ de mètre en répétant 7 fois la douzième partie du prix du mètre : c'est là ce qu'on appelle multiplier par $\frac{7}{12}$. En résumé, on multipliera le prix du mètre par la quantité d'étoffe $15+\frac{7}{12}$.

On aurait pu convertir préalablement en une fraction simple la quantité d'étoffe, ce qui donne $\frac{187}{12}$ de mètre. Il faudrait répéter 187 fois la douzième partie du prix du mètre, c'est-à-dire multiplier par la fraction $\frac{187}{12}$.

Dans l'exemple actuel, les calculs se simplifient ; car

$$18\times\left(15+\frac{7}{12}\right)=\left(15+\frac{7}{12}\right)\times 18=280+\frac{1}{2}.$$

On a multiplié d'abord la fraction $\frac{7}{12}$ par 18 ; le produit $\frac{7\times 18}{12}$, par la suppression du facteur 6, qui se trouve au numérateur et au dénominateur, se réduit à $\frac{7\times 3}{2}=\frac{21}{2}=10+\frac{1}{2}$. On a multiplié ensuite le nombre entier 15 par 18 et ajouté les 10 unités retenues. Ainsi les 15 mètres et $\frac{7}{12}$ coûtent 280 francs plus $\frac{1}{2}$.

2° On a acheté 15 mètres plus $\frac{7}{12}$ d'étoffe pour 280 francs plus $\frac{1}{2}$. Quel est le prix du mètre?

Le prix du mètre, multiplié par la quantité d'étoffe, doit reproduire la somme payée ; on obtiendra donc le prix du mètre en divisant la somme payée par la quantité d'étoffe achetée.

$$\left(280+\frac{1}{2}\right):\left(15+\frac{7}{12}\right)=\left(280+\frac{1}{2}\right):\frac{187}{12}=\frac{561}{2}\times\frac{12}{187}=\frac{3366}{187}=18.$$

On pourrait faire directement sur cet exemple le raisonnement qui a conduit à la règle du n° 126. On sait ce qu'ont coûté 187 *douzièmes de mètre; il est clair que* 187 *mètres auraient coûté douze fois plus, et qu'un seul mètre coûterait* 187 *fois moins; il faut donc, pour avoir le prix du mètre, multiplier la somme payée par* 12 *et diviser par* 187; *en un mot, il faut multiplier par la fraction* $\frac{12}{187}$.

3° Quelle quantité d'étoffe à 18 francs le mètre peut-on acheter avec 280 francs plus $\frac{1}{2}$?

Le prix du mètre multiplié par la quantité d'étoffe devant reproduire la somme totale, on obtiendra cette quantité d'étoffe en divisant la somme totale par le prix du mètre.

$$\left(280+\frac{1}{2}\right):18=15+\frac{21}{30}=15+\frac{7}{12}.$$

CHAPITRE III.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

Définition.

139. Lorsqu'on partage l'unité en parties égales de dix en dix fois plus petites, et qu'on prend un certain nombre de ces parties, on a ce qu'on appelle une *fraction décimale*.

Un nombre entier, augmenté d'une fraction décimale, porte le nom de *nombre décimal*.

On partage d'abord l'unité en dix parties égales, appelées *dixièmes;* on partage ensuite le dixième en dix parties égales, appelées *centièmes,* parce que l'unité en contient cent; puis le centième en dix *millièmes,* le millième en dix *dix-millièmes,* le dix-millième en dix *cent-millièmes,* le cent-millième en dix *millionièmes,* etc.

Cela posé, pour mesurer une grandeur plus petite que l'unité, on cherche combien elle contient de dixièmes; elle en contient 7, par exemple, et il y a un reste. On cherche combien ce reste contient de centièmes; il en contient 3, et il y a un nouveau reste. On cherche combien ce nouveau reste contient de millièmes; il en contient 8. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on n'ait plus de reste, ou jusqu'à ce qu'on arrive à un reste assez petit pour qu'on puisse, sans inconvénient, le négliger.

On obtient de la sorte une fraction décimale : SEPT *dixièmes,* TROIS *centièmes,* HUIT *millièmes.*

Lorsque la grandeur à mesurer est plus grande que l'unité, on cherche d'abord combien d'unités elle contient; puis on mesure le reste au moyen d'une fraction décimale, ainsi que

je l'ai expliqué. De cette manière, la grandeur est représentée par un nombre entier, augmenté d'une fraction décimale, c'est-à-dire par un nombre décimal.

Numération des nombres décimaux.

140. Dans la numération des nombres entiers, on a formé des unités de dix en dix fois plus grandes, et maintenant on forme des unités de dix en dix fois plus petites. Le tableau complet des ordres d'unités :

. . . .
. . . .
Mille,
Centaine,
Dizaine,
UNITÉ fondamentale,
Dixième,
Centième,
Millième,
. . . .
. . . .

se compose, en partant de l'unité fondamentale, de deux séries indéfinies, l'une ascendante, l'autre descendante. On peut d'ailleurs considérer ces deux séries comme n'en formant qu'une, indéfinie dans l'une et dans l'autre sens. Chaque unité est dix fois plus grande que celle qui est placée au-dessous d'elle, et dix fois plus petite que celle qui est placée au-dessus.

141. La propriété fondamentale des nombres décimaux, c'est qu'on peut les écrire sous la même forme que les nombres entiers. Je rappelle en effet la convention sur laquelle repose la numération écrite : un chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes. Réciproquement, un chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités dix fois plus petites. D'après cela, un chiffre placé à la droite du chiffre des unités représentera des dixièmes; un chiffre

placé à la droite du chiffre des dixièmes représentera des unités dix fois plus petites que les dixièmes, c'est-à-dire des centièmes; un chiffre placé à la droite du chiffre des centièmes représentera des unités dix fois plus petites que les centièmes, c'est-à-dire des millièmes, etc... Le nombre décimal 425 *unités*, 7 *dixièmes*, 3 *centièmes*, 8 *millièmes*, s'écrira donc

425,738.

On met une virgule après le chiffre 5 pour indiquer que ce chiffre désigne les unités principales. Si l'on ne mettait pas de virgule, le chiffre 5, quand on écrit 7 à sa droite, exprimerait des dizaines.

Ainsi l'écriture des nombres décimaux repose sur cette convention générale, que le rang de chaque chiffre, à partir de la virgule, soit vers la gauche, soit vers la droite, indique l'ordre des unités, ordre ascendant ou descendant.

La fraction décimale 7 *dixièmes*, 3 *centièmes*, 8 *millièmes*, s'écrit :

0,738

Le chiffre 0 tient ici la place des unités principales.

Il est inutile de distinguer les fractions décimales des nombres décimaux; on considère une fraction décimale comme un nombre décimal qui a 0 pour partie entière.

Énoncer un nombre décimal écrit.

142. Soit le nombre 0,738. Il serait trop long de dire 7 *dixièmes*, 3 *centièmes*, 8 *millièmes*. Je remarque que le *centième* vaut dix *millièmes*, que le *dixième* vaut cent *millièmes*; en rapportant tout au *millième*, on dira donc 738 *millièmes*.

De même, le nombre 425,738 s'énoncera 425 *unités*, 738 *millièmes*.

RÈGLE. *Pour énoncer un nombre décimal, on énonce d'abord le nombre entier placé à gauche de la virgule, puis le nombre placé à droite, en le faisant suivre du nom des dernières unités.*

Ainsi les nombres

0,06—0,0047—2,10005—70,004

s'énoncent

Six *centièmes.*
Quarante-sept *dix millièmes.*
Deux *unités,* dix mille cinq *cent millièmes.*
Soixante-dix *unités,* quatre *millièmes.*

143. *Un nombre décimal ne change pas quand on place des zéros, soit à gauche de la partie entière, soit à droite de la partie décimale*; car les zéros ainsi placés n'ont aucune influence sur les autres chiffres. Ainsi, au lieu de 12,457, on peut écrire 012,45700.

144. D'après leur définition, les fractions décimales ne sont qu'une espèce particulière de fractions ordinaires. En effet, la fraction décimale 0,437, s'énonçant 437 *millièmes,* peut s'écrire $\frac{437}{1000}$. Le nombre décimal 25,437 s'écrira d'abord sous forme de nombre fractionnaire $25 + \frac{437}{1000}$; d'autre part, comme on peut l'énoncer 25437 millièmes, on l'écrira aussi sous forme de fraction ordinaire $\frac{25437}{1000}$. Ainsi, *une fraction décimale est égale à une fraction ordinaire qui a pour numérateur le nombre obtenu en supprimant la virgule, et pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux.*

Déplacement de la virgule.

145. Si, dans le nombre 12,457, on déplace la virgule d'un rang vers la droite, on obtient un nombre 124,57 dix fois plus grand que le précédent. Car le chiffre 7, qui auparavant exprimait des millièmes, exprime maintenant des centièmes, unités dix fois plus grandes; le chiffre 5, qui exprimait des centièmes, exprime maintenant des dixièmes, unités dix fois plus grandes, et ainsi de suite; en un mot, l'ordre de chaque chiffre s'est élevé d'un rang dans le tableau des unités, sa

valeur, et par conséquent celle du nombre lui-même, est devenue dix fois grande.

Si dans le nombre 12,457 on déplace la virgule de deux rangs vers la droite, on obtient un nombre 1245,7 cent fois plus grand que le précédent. Car, l'ordre de chaque chiffre s'étant élevé de deux rangs, sa valeur, et par suite celle du nombre lui-même, est devenue cent fois plus grande.

Réciproquement, si dans le nombre 12,457 on déplace la virgule d'un rang vers la gauche, on obtient un nombre 1,2457 dix fois plus petit que le précédent, etc.

En résumé, *si dans un nombre décimal on déplace la virgule de un, deux, trois... rangs vers la droite ou vers la gauche, le nombre devient dix, cent, mille... fois plus grand ou plus petit.*

Les zéros que l'on peut ajouter à la droite et à la gauche d'un nombre décimal permettent de déplacer la virgule d'autant de rangs qu'on voudra d'un côté ou de l'autre. Ainsi dans le nombre 12,457, si l'on déplace la virgule de quatre rangs, on obtient deux nombres, l'un 124570 dix mille fois plus grand, l'autre 0,0012457 dix mille fois plus petit.

Addition.

146. Puisque les nombres décimaux sont composés, comme les nombres entiers, d'unités de dix en dix fois plus grandes, et s'écrivent sous la même forme, les opérations, que l'on a appris à effectuer sur les nombres entiers, s'exécutent de la même manière sur les nombres décimaux.

L'addition des nombres décimaux s'effectue comme celle des nombres entiers. On écrit les nombres décimaux les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale, et, par conséquent, que les virgules se correspondent; puis on additionne les chiffres contenus dans les colonnes successives, en commençant par la droite. Ainsi, soit à additionner les nombres 27,658—8,49—0,067; on les dispose comme il suit :

```
 27,658
  8,49
  0,067
 ------
 36,215
```

Additionnant d'abord les millièmes, on dira : 8 et 7 font 15 millièmes, je pose 5 millièmes au-dessous de la colonne des millièmes et je reporte 1 centième à la colonne suivante. La colonne suivante donne 21 centièmes; je pose 1 centième et je reporte 2 dixièmes; et ainsi de suite.

Soustraction.

147. La soustraction des nombres décimaux s'effectue comme celle des nombres entiers. On écrit le plus petit nombre au-dessous du plus grand, de manière que les virgules se correspondent; puis on retranche chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant.

De 25,895 retrancher 12,463. On écrira

```
 25,895
 12,463
 ------
 13,432
```

De 5 millièmes j'ôte 3 millièmes, il reste 2 millièmes que j'écris au-dessous de la colonne des millièmes; de 9 centièmes j'ôte 6 centièmes, il reste 3 centièmes que j'écris, etc.

Lorsqu'un chiffre inférieur est plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on lève la difficulté comme pour les nombres entiers.

De 20,805 retrancher 9,728.

```
 20,805
  9,728
 ------
 11,077
```

De 5 millièmes on ne peut ôter 8 millièmes; j'ajoute au nombre supérieur 10 millièmes, ce qui fait 15 millièmes, dont on peut retrancher 8. Afin que la différence ne change pas, j'ajoute la même quantité ou 1 centième au nombre inférieur, de sorte que par la pensée je remplace 2 par 3, etc.

De 10,5 retrancher 9,783.

$$\begin{array}{r} 10{,}5 \\ 9{,}783 \\ \hline 0{,}717 \end{array}$$

On imaginera, mais sans les écrire, deux zéros à la droite du 5.

Multiplication.

Nous examinerons successivement le cas où le multiplicateur est un nombre entier, et celui où il est un nombre décimal.

Cas où le multiplicateur est entier.

148. Soit à multiplier 6,45 par 27. Il s'agit de répéter 27 fois le multiplicande, qui est égal à 645 *centièmes*. Si l'on multiplie le nombre entier 645 par 27, on trouve 17415; puisque 27 fois 645 *unités* font 17415 *unités*, il est clair que 27 fois 645 *centièmes* feront 17415 *centièmes*, c'est-à-dire le nombre décimal 174,15. Ainsi le produit d'un nombre décimal par un nombre entier renferme autant de chiffres décimaux que le muliplicande.

Cas où le multiplicateur est décimal.

149. Je suppose maintenant que l'on ait à multiplier un nombre décimal 4,576 par un nombre décimal 2,38. Puisque le multiplicateur est égal à 238 centièmes, la question revient à répéter 238 fois la centième partie du multiplicande; or on obtient la centième partie du multiplicande en reculant la virgule de deux rangs vers la gauche, ce qui donne 0,04576 ou 4576 *cent-millièmes;* pour répéter cette quantité 238 fois, il suffit de multiplier le nombre entier 4576 par 238, ce qui donne 1089088 *cent-millièmes*, c'est-à-dire le nombre décimal 10,89088.

Le produit renferme autant de chiffres décimaux que le nouveau multiplicande 0,04576 : or on forme ce dernier en reculant la virgule, dans le multiplicande proposé, d'autant

de rangs vers la gauche qu'il y a de chiffres décimaux dans le multiplicateur ; donc le nouveau multiplicande, et par conséquent le produit, renferment autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur proposés. On en conclut :

RÈGLE. *Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, on effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule, puis on sépare par une virgule sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur proposés,*

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 4{,}576 \\ 2{,}38 \\ \hline 36608 \\ 13728 \\ 9152 \\ \hline 10{,}89088 \end{array}$$

150. On serait arrivé immédiatement à cette règle générale, en mettant les nombres décimaux sous forme de fractions ordinaires, et en leur appliquant la règle démontrée pour la multiplication des fractions ordinaires. Ainsi

$$4{,}576 \times 2{,}38 = \frac{4576}{1000} \times \frac{238}{100} = \frac{4576 \times 238}{100000}.$$

On voit qu'il faut faire le produit des deux nombres entiers que l'on obtient en effaçant les virgules, puis diviser le résultat par 100000. Or, on effectue cette division en séparant par une virgule sur la droite du résultat autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéros, c'est-à-dire autant qu'il y a de chiffres décimaux dans le multiplicande et dans le multiplicateur.

Division.

Nous examinerons successivement le cas où le diviseur est entier et celui où il est fractionnaire.

Cas où le diviseur est entier.

151. Soit à diviser 481,78 par 26. Le dividende se compose de 48178 *centièmes*. Si l'on divise le nombre entier 48178 par 26, on obtient pour quotient 1853. Puisque 26 fois 1853 unités font 48178 unités, 26 fois 1853 centièmes font 48178 centièmes, c'est-à-dire le dividende proposé; donc le quotient cherché est 1853 *centièmes*, ou 18,53.

RÈGLE. *Pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, on effectue la division comme si le dividende était un nombre entier, en ayant soin, quand on a abaissé le chiffre des unités du dividende, de mettre une virgule à la droite du chiffre correspondant du quotient.*

On dispose l'opération de la manière suivante :

```
4 8 1,7 8 | 2 6
2 2 1     |------
  1 3 7   | 1 8,5 3
      7 8
        0
```

En mettant la virgule comme nous l'avons dit, le quotient a autant de chiffres décimaux que le dividende, ce qui doit être, puisqu'ils expriment l'un et l'autre des unités de même ordre.

152. Soit encore à diviser 2,645 par 47. La division du nombre entier 2645 par 47 donne pour quotient $56+\frac{13}{47}$. Si l'on répète 47 fois 56 unités plus la fraction $\frac{13}{47}$ d'unité, on obtient 2645 unités; donc, en répétant 47 fois 56 millièmes plus la fraction $\frac{13}{47}$ de *millième*, on obtiendra 2645 millièmes, c'est-à-dire le dividende proposé. Ainsi le quotient demandé égale 56 *millièmes*, plus une fraction $\frac{13}{47}$ de *millième;* en négligeant cette fraction de millième, on commet une erreur plus petite qu'un millième. Donc le quotient est 0,056 à moins d'un millième près.

Le quotient est compris entre 0,056 et 0,057; il est facile de voir,

à l'inspection du reste, duquel de ces deux nombres il est le plus rapproché. Le reste 13 étant plus petit que la moitié du diviseur, la fraction complémentaire $\frac{13}{47}$ de millième est plus petite qu'un demi-millième; donc le quotient est plus rapproché de 0,056 que de 0,057. On prendra 0,056 par défaut à moins d'un demi-millième près.

Mais dans l'exemple suivant :

2,6 6 5	4 7
3 1 5	0,0 5 6
3 3	

le reste étant plus grand que la moitié du diviseur, la fraction complémentaire $\frac{33}{47}$ de millième est plus grande qu'un demi-millième, et le quotient est plus rapproché de 0,057 que de 0,056. On prendra 0,057 par excès à moins d'un demi-millième près.

Ainsi : *lorsque le reste est plus petit que la moitié du diviseur, on conserve le dernier chiffre tel qu'on l'a obtenu; lorsque le reste est plus grand que la moitié du diviseur, on augmente ce dernier chiffre d'une unité.* De cette manière, l'erreur sera toujours moindre qu'une demi-unité de l'ordre auquel on s'arrête.

153. Si l'on veut une approximation plus grande; si l'on demande, par exemple, le quotient à moins d'un millionième près, on met le dividende sous la forme 2,645000 par l'addition d'un nombre convenable de zéros. La division donne pour quotient 0,056276, plus la fraction $\frac{28}{47}$ de millionième; en négligeant cette fraction, on commet une erreur moindre qu'un millionème.

Mais, dans la pratique, il est inutile d'écrire les zéros à la droite du dividende : quand on aura abaissé tous les chiffres du dividende proposé, on formera le dividende partiel suivant, en mettant à la droite du reste un zéro, et on continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu le quotient avec une approximation suffisante. L'erreur, étant toujours moindre

qu'une unité de l'ordre auquel on s'arrête, deviendra aussi petite qu'on voudra. On dispose ainsi l'opération :

```
2,645 | 47
  295 |----------
  130   0,056276
   360
    310
     28
```

Cas où le diviseur est décimal.

154. D'après les explications que nous avons données au n° 135, nous avons déjà fait comprendre que le quotient ne change pas, quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre. Mais il est bon de démontrer cette proposition d'une manière plus précise. Désignons par la lettre a la quantité dividende, par b la quantité diviseur, et par q le quotient; puisque le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, on a

$$a = b \times q.$$

Si l'on multiplie ces deux quantités égales par un même nombre c, on a deux produits égaux

$$a \times c = b \times q \times c,$$

ou, en changeant l'ordre des facteurs,

$$a \times c = b \times c \times q.$$

Le nombre $a \times c$ est égal à un produit de deux facteurs, l'un $b \times c$, l'autre q; il en résulte que le quotient de $a \times c$ par $b \times c$ est q, c'est-à-dire est le même que le quotient de a par b.

155. Soit à diviser 4,576 par 2,38. Si l'on multiplie par le même nombre 100 le dividende et le diviseur, le quotient ne change pas, et la question revient à diviser le nombre décimal 457,6 par le nombre entier 238, ce qui rentre dans le cas précédent. Le quotient est 1,923 par excès à moins d'un demi-millième près. Ainsi :

RÈGLE. *Lorsque le diviseur est un nombre décimal, on supprime la virgule au diviseur, en ayant soin de la déplacer dans le dividende d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur; et l'on a à diviser un nombre décimal par un nombre entier.*

On demande, par exemple, le quotient de 2 par 0,059 a moins d'un centième près. On divisera 2000 par 59, et l'on trouvera pour le quotient cherché 33,90 par excès à moins d'un demi-centième près.

CHAPITRE IV.

CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN FRACTIONS DÉCIMALES.

---

156. On a vu que le calcul des fractions décimales se ramène immédiatement au calcul des nombres entiers, tandis que le calcul des fractions ordinaires est beaucoup plus compliqué. Il est donc utile, lorsqu'une quantité est exprimée par une fraction ordinaire, de savoir l'exprimer en décimales. C'est ce qu'on appelle convertir une fraction ordinaire en fraction décimale.

Puisqu'une fraction ordinaire est égale au quotient de la division de son numérateur par son dénominateur, on effectuera cette division d'après la règle établie pour la division des nombres décimaux. Soit, par exemple, la fraction $\frac{3}{8}$;

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 8 \\ \cline{2-2} 6\,0 & 0{,}3\,7\,5 \\ 4\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

Le quotient étant exactement 0,375, la fraction ordinaire $\frac{3}{8}$ est égale à la fraction décimale 0,375.

157. J'examine dans quel cas la conversion est possible exactement, c'est-à-dire dans quel cas, en poussant la division suffisamment loin, on arrive à un reste nul.

Je remarque d'abord qu'en opérant comme on l'a fait, on a divisé par le dénominateur le numérateur suivi d'un certain nombre de zéros ou multiplié par une puissance de 10; dans l'exemple précédent, on a multiplié le numérateur 3 par 1000,

et on a divisé 3000 par 8. Pour qu'on obtienne un quotient exact, il faut donc que le produit du numérateur par une puissance convenable de 10 soit divisible par le dénominateur. Or on peut supposer que la fraction ordinaire a été préalablement réduite à sa plus simple expression : pour que le dénominateur divise le produit du numérateur par une puissance de 10, comme il est premier avec le numérateur, il faut qu'il divise la puissance de 10; mais une puissance de 10 ne renferme que les deux facteurs premiers 2 et 5 : il est donc nécessaire que le dénominateur ne renferme lui-même que ces deux facteurs premiers 2 et 5.

Cette condition suffit ; car, lorsqu'elle est remplie, si l'on multiplie le numérateur par une puissance de 10 marquée par le plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans le dénominateur, le produit sera divisible par le dénominateur. Je remarque en outre que la fraction décimale ainsi obtenue renfermera un nombre de chiffres décimaux égal au nombre des zéros ajoutés à la droite du numérateur, et par conséquent égal au plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans le dénominateur. Ainsi :

THÉORÈME I. *Pour qu'une fraction ordinaire irréductible puisse être convertie exactement en décimales, il est nécessaire et il suffit que le dénominateur de la fraction ne renferme que les facteurs premiers* 2 *et* 5; *le nombre des chiffres décimaux est égal au plus haut exposant des facteurs* 2 *et* 5 *dans le dénominateur.*

158. Si le dénominateur de la fraction ordinaire irréductible renferme des facteurs premiers autres que 2 et 5, on n'arrive jamais à un reste nul, et par conséquent il est impossible d'exprimer la fraction proposée exactement en décimales. Mais dans ce cas on l'exprime avec une approximation aussi grande qu'on veut; car, si l'on pousse la division assez loin, l'erreur, étant moindre qu'une unité de l'ordre auquel on s'arrête, devient aussi petite qu'on veut.

La fraction ordinaire donne ainsi naissance à une fraction décimale; je vais démontrer qu'elle est *périodique,* c'est-à-

dire qu'à partir d'un certain rang elle se compose des mêmes chiffres qui se reproduisent dans le même ordre. En effet, dans les divisions successives, comme tous les restes sont plus petits que le diviseur, après un nombre d'opérations au plus égal au diviseur diminué d'une unité, on retombe nécessairement sur un reste déjà obtenu, et alors on recommence dans le même ordre les divisions déjà faites, et les mêmes chiffres se reproduisent au quotient.

Je prends pour exemple la fraction $\frac{4}{7}$;

```
40    | 7
 50   |-------------
  10  | 0,57142857....
   30
    20
     60
      4
```

Puisque les restes sont plus petits que 7, il n'y a que six restes différents possibles, savoir les six premiers nombres; or les cinq premières divisions donnent les six premiers nombres 4, 5, 1, 3, 2, 6; tous les restes possibles sont épuisés; la division suivante ramènera nécessairement un reste déjà obtenu. Ici on obtient le premier reste 4, et on recommence les divisions déjà faites, à partir de la première; on retrouve ainsi au quotient les mêmes chiffres dans le même ordre. Le nombre 571428, formé par les chiffres qui se reproduisent indéfiniment, constitue ce qu'on appelle la *période*. Je remarque que la période renferme au plus un nombre de chiffres égal au diviseur diminué d'une unité; mais souvent elle en renferme un nombre moindre. Ainsi la fraction $\frac{3}{11}$ donne naissance à la fraction décimale périodique simple 0,272727....., dont la période n'a que deux chiffres; après deux divisions seulement on retrouve le premier reste 3.

```
30 | 11
80 |----------
 3 | 0,2727......
```

159. On distingue deux sortes de fractions décimales

périodiques : les fractions décimales *périodiques simples*, dont les chiffres périodiques commencent immédiatement après la virgule ; et les fractions *périodiques mixtes*, dont les chiffres périodiques ne commencent qu'à partir d'un certain rang après la virgule. Les deux fractions que nous venons de considérer sont périodiques simples. La fraction $\frac{57}{88}$ donne naissance à une fraction périodique mixte 0,6477272727...... ; la période 72 ne commence qu'au quatrième chiffre ; les trois chiffres placés entre la virgule et la première période sont dits *irréguliers*.

En résumé, ***la conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale donne naissance, soit à une fraction décimale limitée, soit à une fraction périodique, simple ou mixte.***

160. Occupons-nous maintenant de la question inverse, c'est-à-dire de la conversion des fractions décimales en fractions ordinaires.

Lorsque la fraction décimale est limitée, il n'y a pas de difficulté ; on sait qu'une pareille fraction est égale à une fraction ordinaire qui a pour dénominateur une puissance de 10. Ainsi $0,375 = \frac{375}{1000}$.

Cette fraction ordinaire pourra souvent être simplifiée ; mais la fraction irréductible à laquelle on arrivera ne renfermera à son dénominateur que les facteurs premiers 2 et 5 ; car le dénominateur primitif, étant une puissance de 10, ne renferme que les facteurs 2 et 5 ; en simplifiant, on supprime des facteurs sans en introduire de nouveaux.

Fraction périodique simple.

161. Soit la fraction périodique simple 0,2727....... Je vais démontrer que cette fraction décimale est égale à une certaine fraction ordinaire, avec une approximation aussi grande qu'on veut, et je déterminerai en même temps cette fraction ordinaire. En prenant, par exemple, trois périodes, on a une fraction décimale limitée 0,272727 qui a un sens bien précis ; je multiplie cette fraction par 100, ce qui donne le nombre déci-

mal 27,2727 ; de ce nombre décimal je retranche la fraction elle-même.

$$\begin{array}{r} 27{,}2727 \\ 0{,}272727 \\ \hline 27-0{,}000027. \end{array}$$

Je retranche les deux premières périodes à partir de la virgule, il reste à retrancher la dernière période ; la différence égale le nombre entier 27 moins cette dernière période 0,000027. Or de 100 fois la fraction j'ai retranché une fois la fraction, la différence égale 99 fois la fraction ; j'obtiendrai la fraction elle-même en divisant cette différence par 99 ; donc la fraction décimale 0,272727 égale la fraction $\frac{27}{99}$, diminuée de la quantité très-petite $\frac{27}{1000000 \times 99}$.

En prenant quatre périodes, on trouverait de même

$$0{,}27272727 = \frac{27}{99} - \frac{27}{100000000 \times 99}.$$

En général la fraction décimale égale la fraction ordinaire $\frac{27}{99}$, moins la 99me partie de la dernière période. Or, si l'on prend un nombre de périodes de plus en plus grand, la valeur de la dernière période diminue de plus en plus et devient aussi petite qu'on veut ; donc la fraction décimale proposée diffère de la fraction ordinaire $\frac{27}{99}$ d'une quantité aussi petite qu'on veut. En un mot, la fraction décimale périodique tend vers une limite égale à $\frac{27}{99}$.

Le raisonnement que je viens de faire s'applique évidemment à une fraction périodique simple quelconque. On transporte la virgule après la première période, en multipliant par une puissance de 10 marquée par le nombre des chiffres de la période ; on retranche du produit la fraction elle-même, ce qui donne une différence égale à la fraction multipliée par un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période. D'autre part cette différence est exprimée par la période considérée comme un nombre entier, moins la dernière période. Donc la fraction décimale a pour limite une fraction ordinaire ayant pour numérateur la période et pour

dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période. Ainsi :

THÉORÈME II. *Une fraction décimale périodique simple est égale à une fraction ordinaire qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre formé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres à la période.*

La fraction $\frac{27}{99}$ peut être simplifiée ; mais, comme un nombre formé de 9 seulement ne renferme ni le facteur 2 ni le facteur 5, on arrivera à une fraction ordinaire irréductible qui ne renfermera à son dénominateur ni le facteur 2, ni le facteur 5.

162. Il est évident que, si on réduisait cette fraction ordinaire en décimales, on retrouverait la fraction périodique proposée. Au reste on peut s'en assurer de la manière suivante : je veux démontrer, par exemple, que la fraction périodique 0,272727...... provient de la conversion en décimales de la fraction ordinaire $\frac{27}{99}$.

Puisque 100 fois un nombre est égal à 99 fois, plus une fois ce nombre, on a

$$27\times100=27\times99+27=99\times27+27.$$

Donc, quand on calcule en décimales le quotient de 27 par 99, après les deux premières divisions on obtient le quotient 27 et on trouve le premier reste 27 ; donc la fraction décimale est périodique simple et la période est 27.

Fraction périodique mixte.

163. Soit maintenant une fraction périodique mixte 0,385272727...... En prenant, par exemple, trois périodes, on a une fraction décimale limitée 0,385272727. Je transporte successivement la virgule au commencement et à la fin de la première période, en multipliant par 1000 et par 100000, ce qui donne les nombres décimaux 385,272727 et 38527,2727 ; puis je retranche le premier du second

$$\begin{array}{r} 38527{,}2727 \\ 385{,}272727 \\ \hline 38142-0{,}000027 \end{array}$$

J'ai retranché la partie entière et les deux premières périodes, il reste à retrancher la dernière période ; la différence égale le nombre entier 38142, moins la dernière période. Or de 100000 fois la fraction, j'ai retranché 1000 fois cette fraction, la différence égale 99000 fois la fraction ; j'obtiendrai la fraction elle-même en divisant cette différence par 99000 ; donc la fraction décimale égale la fraction $\frac{38142}{99000}$, moins la 99000me partie de la dernière période. Si l'on prend un nombre de périodes de plus en plus grand, la valeur de la dernière période diminue et devient aussi petite qu'on veut ; donc la fraction décimale proposée diffère de la fraction ordinaire $\frac{38142}{99000}$ d'une quantité aussi petite qu'on veut. En un mot, la fraction décimale tend vers une limite égale à cette fraction ordinaire. Ainsi :

Théorème III. *Une fraction décimale périodique mixte est égale à une fraction ordinaire qui a pour numérateur la différence des nombres entiers que l'on obtient en transportant la virgule à la fin et au commencement de la première période, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres irréguliers.*

164. Je remarque que le numérateur ne peut jamais être terminé par un zéro ; car il faudrait pour cela que le dernier des chiffres irréguliers fût le même que le dernier chiffre de la période, et alors la période commencerait un chiffre plus tôt. Dans l'exemple précédent, il faudrait que le dernier chiffre irrégulier fût un 7, et alors la fraction devenant 0,387272727......, la période serait 72 et commencerait un chiffre plus tôt ; il n'y aurait que deux chiffres irréguliers et non pas trois, comme on l'a supposé.

Le dénominateur 99×1000, d'après sa composition, ren-

ferme les facteurs 2 et 5 avec des exposants égaux au nombre des chiffres irréguliers, et en outre des facteurs premiers autres que 2 et 5. En simplifiant la fraction, on pourra bien supprimer des facteurs 2 ou des facteurs 5; mais on ne pourra pas supprimer à la fois un facteur 2 et un facteur 5; car alors on diviserait par 10, et le numérateur n'est pas divisible par 10. On arrivera donc à une fraction irréductible renfermant à son dénominateur l'un des facteurs 2 ou 5 avec un exposant égal au nombre des chiffres irréguliers.

165. Nous avons dit que, lorsque le dénominateur d'une fraction ordinaire ne renferme que les facteurs premiers 2 et 5, la fraction se convertit en une fraction décimale limitée, mais que, si le dénominateur renferme des facteurs premiers autres que 2 et 5, la fraction décimale est indéfinie et périodique. Nous pouvons maintenant compléter cette théorie et indiquer à quel caractère on reconnaît d'avance si la fraction périodique est simple ou mixte.

THÉORÈME IV. *Une fraction ordinaire irréductible, dont le dénominateur ne renferme que des facteurs premiers autres que* 2 *et* 5, *donne naissance à une fraction décimale périodique simple.*

En effet, nous savons déjà que la fraction décimale est périodique; elle ne peut être mixte; car la fraction ordinaire irréductible, que représente une fraction périodique mixte, renferme à son dénominateur les facteurs 2 et 5 ou au moins l'un d'eux; donc la fraction décimale sera périodique simple.

166. THÉORÈME V. *Une fraction ordinaire irréductible, dont le dénominateur renferme les facteurs* 2 *et* 5 *et d'autres facteurs, donne naissance à une fraction décimale périodique mixte, et le nombre des chiffres irréguliers est égal au plus haut exposant des facteurs* 2 *et* 5 *dans le dénominateur.*

En effet, la fraction décimale est périodique; elle ne peut être simple; car la fraction ordinaire irréductible, que repré-

sente une fraction périodique simple, ne renferme à son dénominateur ni le facteur 2 ni le facteur 5 ; donc la fraction décimale sera périodique mixte. D'après une remarque faite précédemment, le nombre des chiffres irréguliers doit être égal précisément au plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans le dénominateur.

Considérons par exemple la fraction $\frac{57}{88}$; puisque $88=2^3\times 11$, on aura une fraction périodique mixte avec trois chiffres irréguliers.

167. Remarque. Les développements de toutes les fractions ordinaires qui ont même dénominateur peuvent se déduire du développement de la plus simple d'entre elles, de celle qui a pour numérateur l'unité.

Je considère, par exemple, les fractions qui ont pour dénominateur 11. La fraction $\frac{1}{11}$ égale 0,090909..... J'obtiens immédiatement la fraction $\frac{3}{11}$, en multipliant la période par 3, ce qui donne $\frac{3}{11}=0,272727$..... Et en effet, quand la période est trois fois plus grande, il est clair que la fraction décimale devient elle-même trois fois plus grande.

Une fraction ordinaire, comme $\frac{57}{88}$, qui a pour dénominateur le produit de 11 par des facteurs 2 et 5, se ramène aussi à la fraction $\frac{1}{11}$. Si l'on multiplie en effet les deux termes de la fraction par 5^3, la fraction prend la forme

$$\frac{57\times 5^3}{2^3\times 5^3\times 11}=\frac{7125}{10^3\times 11};$$

la fraction $\frac{7125}{11}$ égale le nombre fractionnaire $647+\frac{8}{11}$; or le développement de la fraction $\frac{8}{11}$ se déduit du développement de $\frac{1}{11}$; il suffit de multiplier la période par 8; donc la fraction $\frac{7125}{11}$ égale 647,727272...... On obtiendra la fraction proposée en divisant ce résultat par 1000; ainsi $\frac{57}{88}=0,6477272$.....

CHAPITRE V.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

---

168. Pour évaluer chaque espèce de grandeurs, il faut, avons-nous dit, une unité fixe ou mesure qui serve de terme de comparaison. Autrefois, en France, comme dans les autres pays, la plus grande confusion régnait dans les mesures; chaque province avait ses mesures particulières; il en résultait des embarras extrêmes pour le commerce. Les rois de France tentèrent, mais inutilement, d'établir l'uniformité et de ramener toutes les mesures à celles de Paris; enfin, le 8 mai 1790, l'Assemblée constituante rendit un décret par lequel elle reconnut la nécessité d'une réforme complète; une commission, nommée par l'Académie et composée de BORDA, LAGRANGE, LAPLACE, MONGE et CONDORCET, fut chargée de préparer un système général de mesures. Le système nouveau fut adopté par la Convention, sanctionné plus tard par le corps législatif, et déclaré obligatoire à partir du 2 novembre 1801; il règne aujourd'hui dans toute l'étendue de la France. On l'appelle système *métrique*, parce que toutes les unités dérivent de l'unité de longueur ou du *mètre*.

Longueurs.

169. DÉFINITION DU MÈTRE. On aurait pu prendre l'unité de longueur arbitrairement; mais, afin qu'on puisse la retrouver dans les siècles futurs, les savants français eurent l'heureuse idée de la lier à la grandeur de la terre. DELAMBRE et MÉCHAIN mesurèrent dans ce but l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone; au moyen de cet arc et de celui mesuré au Pérou, en 1736, par BOUGUER et LA CONDAMINE, on calcula la longueur du quart du méridien, ou la distance du pôle à l'équateur. Cette longueur fut partagée en dix millions de parties égales, et l'une des parties fut prise pour unité de lon-

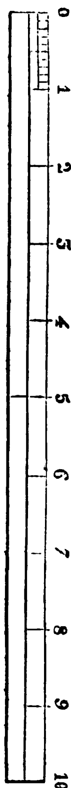
gueur; on a donné à cette unité de longueur le nom de *mètre*.

L'étalon en platine déposé aux archives de l'État, le 4 messidor an VII (22 juin 1799), donne la longueur légale du mètre, quand il est à la température de la glace fondante.

Le mètre est l'unité principale de longueur.

On a formé ensuite, au moyen du mètre, des unités de dix en dix fois plus grandes. Ce sont : le *décamètre* ou dix mètres, l'*hectomètre* ou cent mètres, le *kilomètre* ou mille mètres, le *myriamètre* ou dix mille mètres. Les mots DÉCA, HECTO, KILO, MYRIA, tirés du grec, signifient dix, cent, mille, dix mille.

Pour mesurer les petites longueurs, on a subdivisé le mètre en parties de dix en dix fois plus petites; ce qui donne : d'abord le *décimètre* ou dixième partie du mètre ; puis le *centimètre*, dixième partie du décimètre ou centième partie du mètre; le *millimètre*, dixième partie du centimètre ou millième partie du mètre, etc..... (Les mots DÉCI, CENTI, MILLI, tirés du latin, signifient dixième, centième, millième.)



La figure ci-jointe représente un décimètre divisé en centimètres, le premier centimètre étant d'ailleurs subdivisé en millimètres.

Au moyen de ces unités de différents ordres, une longueur quelconque, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, s'exprimera par un nombre décimal. Les longueurs

Trois *décimètres*,
Deux *décametres*, cinquante-quatre *centimètres*,
Huit *hectomètres*, sept *mètres*, neuf *millimètres*,
S'écriront : $0^{m},3$—$20^{m},54$—$807^{m},009$.

Cependant on ne met pas toujours la virgule après les mètres. Quand il s'agit de grandes longueurs, on compte par kilomètres ou même par myriamètres. Ainsi on dit que la longueur d'un canal est 48 kilomètres, 7 hectomètres, et l'on écrit $48^{k.m},7$. De même, la distance de deux villes est 32 myriamètres, 5 kilomètres, et l'on écrit $325^{k.m}$.

Au contraire, quand il s'agit de longueurs très-petites, on compte par millimètres; on dira par exemple, que l'épaisseur d'une glace est huit millimètres cinq dixièmes, et l'on écrira $8^{mm},5$.

170. MESURES ITINÉRAIRES. En France, les bornes, placées sur le bord des routes et des chemins, indiquent les longueurs en kilomètres. On se sert aussi, pour évaluer les distances, des unités suivantes :

Lieue de 4 kilomètres	4000	mètres.
Lieue de 25 au degré.	4445	»
Lieue marine de 20 au degré.	5556	»
Mille marin de 60 au degré, ou de une minute.	1852	»

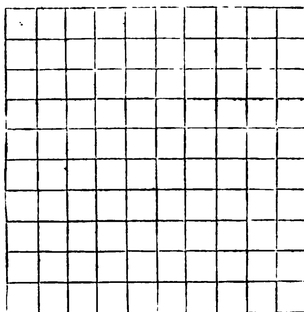
Surfaces.

171. *On prend pour unités de surface les carrés construits sur les unités de longueur.* Ainsi l'unité principale de surface est le *mètre carré;* c'est un carré dont chaque côté a un mètre de longueur.

On a ensuite : d'une part, le *décamètre carré, l'hectomètre carré,* le *kilomètre carré.....;* d'autre part, le *décimètre carré,* le *centimètre carré.....* Ce sont des carrés qui ont pour côtés le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre....., le décimètre, le centimètre.....

Les unités de surface sont de cent en cent fois plus grandes. Je veux démontrer, par exemple, que le mètre carré vaut cent décimètres carrés Je place dix décimètres carrés à la suite les uns des autres sur une même ligne, je forme ainsi une bande qui a dix décimètres ou un mètre de longueur et un décimètre de largeur. Je forme une seconde bande pareille au-dessus de la première, puis une troisième, etc. Quand j'aurai formé dix bandes semblables, l'ensemble sera un carré ayant un mètre de longueur et un mètre de largeur; ce sera par conséquent un mètre carré. Or les dix bandes renferment dix fois dix ou cent décimètres carrés; donc le mètre carré

contient *cent* décimètres carrés; en d'autres termes, le décimètre carré est la centième partie du mètre carré.



De même, le centimètre carré est la centième partie du décimètre carré, le millimètre carré est la centième partie du centimètre carré, etc..... D'autre part, le décamètre carré vaut cent mètres carrés, l'hectomètre carré vaut cent décamètres carrés, etc....

172. Mesurer une surface, c'est chercher combien elle contient de mètres carrés, combien le reste contient de décimètres carrés, etc.....; en un mot, combien elle contient d'unités de chaque ordre, et il peut y avoir jusqu'à 99 unités de chaque ordre. On représente ainsi la surface par un nombre décimal, en ayant soin d'affecter deux chiffres pour chaque ordre d'unités.

Soit le nombre

$$24537^{\text{m.car.}},68195.$$

En partant de la virgule et allant vers la gauche, on trouve successivement : 37 mètres carrés, 45 centaines de mètres carrés ou 45 décamètres carrés, 2 centaines de décamètres carrés ou 2 hectomètres carrés. En allant vers la droite, on trouve 68 centièmes de mètre carré ou 68 décimètres carrés, 19 centièmes de décimètre carré ou 19 centimètres carrés, 5 dixièmes ou 50 centièmes de centimètres carrés, c'est-à-dire 50 millimètres carrés. Le nombre proposé s'énoncera donc :

2 hectom. car., 45 décam. car., 37 m. car., 68 décim. car., 19 cent. car., 50 millim. car.

Les surfaces suivantes :

3 décimètres carrés;

7 décamètres carrés, 54 centim. car.;

2 kilom. car., 73 décam. car., 8 m. car., 235 millim. car.; s'écriront :

0,03 m. car.—700,0054 m. car.—2007308,000235 m. car.

173. Mesures agraires. Pour la mesure des terrains, on emploie comme unité principale le décamètre carré, auquel on donne le nom d'*are*. Parmi les multiples de l'are, on emploie l'*hectare* ou cent ares, et, parmi les subdivisions, le *centiare* ou centième partie de l'are. L'hectare, qui vaut cent ares ou cent décamètres carrés, n'est autre chose que l'hectomètre carré. D'autre part, le centiare, qui est la centième partie de l'are ou du décamètre carré, n'est autre chose que le mètre carré.

Les seules unités employées dans la mesure des terrains sont l'hectare, l'are et le centiare. Ainsi on dit : un domaine de 125 hectares 47 ares; un jardin de 23 ares 50 centiares; et ces quantités s'écrivent :

125,47 hectares.—23,50 ares.

Afin de résumer ce qui précède, je représente dans un tableau les unités de surface.

. . . .

. . . .

Hectomètre carré. . . . hectare.

Décamètre carré . . . . are.

Mètre carré. . . . . centiare.

Décimètre carré.

Centimètre carré.

. . . .

. . . .

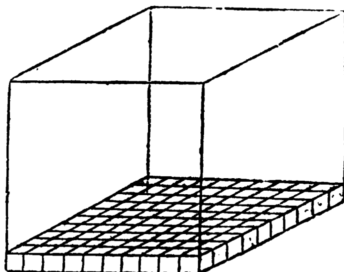
Volumes.

174. On appelle *cube* un volume qui a la forme d'une boîte terminée par six faces carrées; un dé à jouer a la forme d'un cube; tous les côtés du cube ont la même longueur.

On prend pour unités de volume les cubes construits sur les unités de longueur. L'unité principale de volume est le *mètre cube ;* c'est un cube dont chaque côté a un mètre de longueur.

On a ensuite : d'une part, le *décamètre cube, l'hectomètre cube,* etc.....; d'autre part, le *décimètre cube*, le *centimètre cube,* etc..... Ce sont des cubes qui ont pour côtés le décamètre, l'hectomètre....., le décimètre, le centimètre.....

Les unités de volume sont de mille en mille fois plus grandes. Je conçois, par exemple, une caisse qui soit exactement un mètre cube, et je la remplis avec des décimètres cubes. Puisque le fond de la caisse est un mètre carré, je le couvrirai avec cent décimètres cubes; je forme ainsi une couche qui a un décimètre de hauteur. Je dispose une seconde couche pareille au-dessus de la première, puis une troisième, etc....., ainsi que le représente la figure suivante.



Quand j'aurai disposé dix couches semblables, la hauteur totale étant dix décimètres ou un mètre, la caisse sera pleine. Ainsi un mètre cube contient dix fois cent, c'est-à-dire mille décimètres cubes; en d'autres termes, le décimètre cube est la millième partie du mètre cube.

De même, le centimètre cube est la millième partie du décimètre cube, le millimètre cube est la millième partie du centimètre cube. D'autre part, le décamètre cube vaut mille mètres cubes, l'hectomètre cube vaut mille décamètres cubes, etc.

175. Mesurer un volume, c'est chercher combien il contient de mètres cubes, de décimètres cubes....., en un mot, combien il contient d'unités de chaque ordre, et il peut y avoir jusqu'à 999 unités de chaque ordre. On représentera ainsi le volume par un nombre décimal, en ayant soin d'affecter trois chiffres à chaque ordre d'unités.

Soit le nombre

24507638, 0750098 m. cubes.

En partant de la virgule et allant vers la gauche, on trouve successivement : 638 mètres cubes, 507 mille mètres cubes ou 507 décamètres cubes, 24 mille décamètres cubes ou 24 hectomètres cubes. En allant vers la droite, on trouve 75 millièmes de mètres cubes ou 75 décimètres cubes, 9 millièmes de décimètre cube ou 9 centimètres cubes, enfin 8 dixièmes ou 800 millièmes de centimètre cube, c'est-à-dire 800 millimètres cubes. Le nombre s'énoncera donc : 24 hectom. cub., 507 décam. cub., 638 m. cub., 75 décim. cub., 9 centim. cub., 800 mill. cub.

Les volumes suivants :

3 décimètres cubes;

27 décam. cub., 349 centim. cub.;

6 kilom. cub., 467 décam. cub., 8 m. cub., 2700 centim. cub., s'écriront :

0,003 m.cub.—27000,000349 m.cub.—6000467008,0027 m.cub.

176. Mesures de capacité. Pour mesurer les liquides et les grains, on emploie comme unité principale le décimètre cube, auquel on donne le nom de *litre*.

Les multiples du litre sont : le *décalitre*, l'*hectolitre*, le *kilolitre*, ou dix litres, cent litres, mille litres. Les subdivisions du

litre sont : le *décilitre*, le *centilitre*, ou la dixième, la centième partie du litre.

Ces mesures sont des vases qui ont la forme cylindrique. Pour les liquides, la hauteur du vase est double du diamètre de la base. Pour les grains, la hauteur égale le diamètre de la base.

Le kilolitre, qui vaut mille litres ou mille décimètres cubes, n'est autre chose que le mètre cube. Le millilitre, qui est la millième partie du litre ou du décimètre cube, n'est autre chose que le centimètre cube.

Ainsi on dira : la capacité d'un vase est trois décalitres, cinq décilitres ($30^l,5$).—La capacité d'un tonneau est deux hectolitres, huit litres (208^l).

Conformément aux dispositions de la de la loi du 18 germinal an III, chacune des mesures de capacité a son double et sa moitié.

177. Pour la mesure des bois de chauffage ou de charpente, on se sert du mètre cube, qui prend alors le nom de *stère*.

Je résume dans un tableau les unités de volume.

Mètre cube...... kilolitre..... stère.
Décimètre cube.. litre.
Centimètre cube.. millilitre.
Millimètre cube...
....
....

Poids.

178. L'unité fondamentale de poids est le *gramme*. Les multiples du gramme sont le *décagramme*, l'*hectogramme*, le *kilogramme*, ou dix, cent, mille grammes. Les subdivisions du gramme sont le *décigramme*, le *centigramme*, le *milligramme*, ou dixième, centième, millième partie du gramme.

Le kilogramme est le poids dans le vide d'un décimètre cube d'eau distillée, à la température de 4 degrés au-dessus de zéro du thermomètre centigrade. On s'est servi d'eau dis-

tillée, parce que l'eau distillée est parfaitement pure. On a choisi la température de 4 degrés au-dessus de zéro, parce que le poids du même volume d'eau varie avec la température, et que c'est à la température de 4 degrés centigrades que ce poids est le plus grand. Enfin on a pris le poids dans le vide, parce que dans l'air les corps pèsent moins que dans le vide, et que dans l'air le poids est variable suivant l'état de l'atmosphère.

L'étalon en platine déposé aux archives le 4 messidor an VII donne, dans le vide, le poids légal du kilogramme.

Puisque le kilogramme est le poids d'un décimètre cube ou d'un litre d'eau, le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau. Le kilolitre ou le mètre cube d'eau pèse mille kilogrammes. Le poids moyen de l'hectolitre de froment est de 75 kilogrammes.

Le gramme étant un poids très-petit, on rapporte dans le commerce les marchandises ordinaires au kilogramme. Ainsi on dit qu'un ballot pèse 15 kilogrammes, 8 hectogrammes, et on écrit $15^k,8$.

Les fortes pesées s'évaluent au moyen du *quintal métrique,* ou cent kilogrammes. Pour évaluer le chargement des navires, on emploie une unité plus grande encore, le *tonneau* ou mille kilogrammes; un vaisseau de cent tonneaux est un vaisseau capable de porter cent mille kilogrammes.

Conformément à la disposition de la loi du 18 germinal an III, chacune des unités de poids a son double et sa moitié.

Monnaies.

179. MONNAIES D'ARGENT. L'unité de monnaie est le *franc.* Le franc est une pièce du poids de 5 grammes, composée de neuf parties d'argent et d'une de cuivre.

Les subdivisions du franc sont le *décime* (dixième partie du franc) et le *centime* (centième partie du franc). On ne désigne pas les multiples du franc d'une manière spéciale; on dit simplement : dix francs, cent francs, mille francs.

Les pièces d'argent que fabrique aujourd'hui l'État en

France sont : 1° la pièce de 1 franc; 2° celle de 2 francs; 3° celle de 5 francs; 4° d'autre part, la pièce de un demi-franc ou de cinquante centimes; 5° la pièce de vingt centimes.

Toutes ces pièces d'argent sont formées avec un même alliage, composé de neuf parties d'argent pur et d'une partie de cuivre. Puisque la pièce de 1 franc pèse 5 grammes, la pièce 5 francs pese 5 fois plus ou 25 grammes; la pièce de 50 centimes pèse $2^g,5$; celle de 20 centimes pèse 1 gramme.

Deux cents francs en pièces d'argent pèsent 1 kilogramme.

180. MONNAIES D'OR. L'État fabrique en France plusieurs pièces d'or; la pièce de 100 francs, celle de 50 francs, celle de 20 francs, celle de 10 francs et celle de 5 francs. Elles sont composées de neuf parties d'or pur et d'une partie de cuivre.

On ne fabrique plus maintenant de pièces de 40 francs.

D'après la loi, la monnaie d'or a une valeur quinze fois et demie plus grande que celle d'argent, à poids égal; il en résulte que la pièce de 20 francs pèse $\frac{5\times20}{15,5}$ grammes ; ou $\frac{200}{31}=6^g,452$.

155 pièces d'or de 20 francs pèsent 1 kilogramme.

181. MONNAIES DE BRONZE. Les nouvelles monnaies de bronze sont : la pièce de 10 centimes (il en faut 10 pour faire 1 franc); la pièce de 5 centimes, la pièce de 2 centimes et celle de 1 centime. Cette nouvelle monnaie, qui a remplacé l'ancienne monnaie de cuivre, est formée avec un alliage contenant 95 parties de cuivre pur, 4 d'étain et une de zinc. Elle a une valeur légale 20 fois moins grande que la monnaie d'argent, à poids égal; ainsi la pièce de 5 centimes pèse 5 grammes, comme la pièce de 1 franc en argent; la pièce de 1 centime pèse 1 gramme.

182. On n'a pas fabriqué les pièces d'or et d'argent en métal pur, parce que le métal pur n'offre pas assez de dureté et de résistance au frottement. On appelle titre d'un alliage la quantité de métal pur qui entre dans un gramme d'alliage;

les monnaies d'or et d'argent de France sont au titre de neuf dixièmes ou de 900 millièmes. La loi tolère une différence de 2 millièmes en plus ou en moins du titre normal de 900 millièmes, pour les pièces d'argent et pour les pièces d'or.

La loi accorde aussi une tolérance sur le poids, en plus ou en moins du poids normal. La tolérance sur le poids est le millième du poids normal pour les pièces d'or de 100 francs, les 2 millièmes pour celles de 50 et de 20 francs, les 2,5 millièmes pour celles de 10 francs, et enfin les 3 millièmes pour les pièces d'or de 5 francs. Elle est les 3 millièmes du poids pour les pièces d'argent de 5 et de 2 francs, les 5 millièmes pour celles de 1 franc, les 7 millièmes pour celles de 50 centimes, et les 10 millièmes pour celles de 20 centimes. La tolérance du poids est les 10 millièmes du poids pour les pièces de bronze de 10 et de 5 centimes; les 15 millièmes pour celles de 2 et 1 centimes.

On a donné aux pièces de monnaie des diamètres différents, afin qu'on puisse les distinguer facilement. Voici les diamètres des pièces de monnaie en millimètres :

Pièces d'or.		Pièces d'argent.	
fr.	mm.	fr.	mm.
de 100	35	de 5	37
— 50	28	— 2	27
— 20	21	— 1	23
— 10	19	— 0,50	18
— 5	17	— 0,20	15

	mm.
Pièces de cuivre de 10 cent.	30
5	25
2	20
1	15

183. Résumé. Il est facile de comprendre maintenant les avantages du système métrique : 1° les unités principales, destinées à la mesure des différentes espèces de grandeurs, dérivent toutes du mètre d'une manière simple, et le mètre lui-même est lié à la grandeur du globe terrestre; 2° l'échelle des unités qui se rapportent à une même espèce de grandeurs est

en harmonie avec notre système de numération; de sorte qu'une grandeur quelconque s'exprime par un nombre décimal, et que les opérations à faire sur les quantités s'effectuent avec une grande rapidité.

Le système métrique est aujourd'hui en vigueur dans toute la France et en Belgique; depuis quelques années la Suisse a adopté ce système légèrement modifié; il serait à désirer que les autres peuples de l'Europe l'adoptassent également. La nation française, lorsqu'elle préparait cette grande réforme, invita plusieurs fois les autres nations à se joindre à elle pour l'opérer en commun; les guerres de la Révolution et de l'Empire, des susceptibilités nationales mal entendues, firent échouer ce magnifique projet.

Anciennes mesures de France.

184. Longueurs. Avant l'établissement du système métrique, on employait en France comme unité principale de longueur le *pied* de Charlemagne ou *pied-de-roi*. Le pied se divisait en douze *pouces*, le pouce en douze *lignes*. Six pieds forformaient une *toise*.

Voici les valeurs des diverses unités comparées au mètre :

La toise vaut..	$1^m,94904$
Le pied vaut..	$0^m,32484$
Le pouce vaut..	$0^m,02707$
La ligne vaut..	$0^m,002256$

Il est facile de réduire en mètres une longueur exprimée en toises, pieds et pouces. Par exemple, pour réduire en mètres 3 toises 2 pieds 7 pouces, on multiplie la longueur de la toise par 3, celle du pied par 2, celle du pouce par 7; en additionnant, on trouve $6^m,68628$. Ordinairement on opère cette réduction au moyen de tables construites à cet effet.

185. Mesures agraires. La *perche* des eaux et forêts était un carré de 22 pieds de côté. L'*arpent* des eaux et forêts était composé de 100 perches de 22 pieds.

La perche de Paris avait 18 pieds de côté. L'arpent de Paris contenait 100 perches de 18 pieds.

	Mètres carrés.
La perche des eaux et forêts vaut..............	51,07
L'arpent des eaux et forêts vaut................	5107,20
La perche de Paris vaut......................	34,19
L'arpent de Paris vaut........................	3418,87

Les mesures agraires variaient d'une province à l'autre.

Mesures de capacité. On employait, pour mesurer les graines le *setier* qui se divisait en douze *boisseaux*, et le boisseau en 16 *litrons*.

Le setier de Paris vaut.......................	156 litres.
Le boisseau vaut............................	13 »
Le litron vaut..............................	0,8125

Pour la mesure des liquides, principalement pour les vins, on employait le *muid*, considéré comme étant égal à 8 pieds cubes. Le muid se divisait en deux *feuillettes*, la feuillette contenait 144 pintes.

Le muid vaut..............................	264 litres.
La pinte vaut..............................	0,92

Poids. L'unité de poids était la *livre*. La livre se divisait en 16 *onces*, l'once en 8 *gros*, le gros en 72 *grains*.

	Grammes.
La livre vaut..............................	489,5
L'once vaut..............................	30,59
Le gros vaut..............................	3,82
Le grain vaut..............................	0,053

Monnaies. L'unité de monnaie était la *livre tournois*. Par une loi du 25 germinal an IV, la valeur de la livre tournois a été fixée à 99 centimes. La livre tournois se divisait en 20 sous, le sou en 4 liards ou en 12 deniers.

Table de conversion des anciennes mesures en mesures légales.

Réduction des toises, pieds, pouces, lignes en mètres.

Nombres.	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en millimètres.
1	1,94904	0,32484	0,02707	2,256
2	3,89807	0,64968	0,05414	4,512
3	5,84711	0,97452	0,08121	6,767
4	7,79615	1,29936	0,10828	9,023
5	9,74518	1,62420	0,13535	11,279
6	11,69422	1,94904	0,16242	13,535
7	13,64326	2,27388	0,18949	15,791
8	15,59229	2,59872	0,21656	18,047
9	17,54133	2,92355	0,24363	20,302

Réduction des toises et pieds carrés et cubes en mètres carrés et cubes.

Nombres.	Toises carrées en mètres carrés.	Pieds carrés en mètres car.	Toises cubes en mètres cubes.	Pieds cubes en mètres cubes.
1	3,7987	0,1055	7,4039	0,03428
2	7,5975	0,2110	14,8078	0,06855
3	11,3962	0,3166	22,2117	0,10283
4	15,1950	0,4221	29,6156	0,13711
5	18,9937	0,5276	37,0195	0,17139
6	22,7925	0,6331	44,4233	0,20566
7	26,5912	0,7386	51,8272	0,23994
8	30,3899	0,8442	59,2311	0,27422
9	34,1887	0,9497	66,6350	0,30850

Brasses des cartes marines.

France.	*Brasse*, 5 pieds	1m,624
Angleterre.	*Brasse* (*Fathom*)	1m,829
Hollande.	*Brasse* (*Waâm*)	1m,883
Espagne	*Brasse* (*Braza*)	1m,696

Mesures anglaises

COMPARÉES AUX MESURES FRANÇAISES.

MESURES DE LONGUEUR

ANGLAISES.	FRANÇAISES.
Inch, Pouce ($\frac{1}{12}$ du pied)........	2,539954 centimètres.
Foot, Pied ($\frac{1}{3}$ du yard)..........	3,0479449 décimètres.
Yard impérial.................	0,91438348 mètre.
Fathom (2 yards)	1,82876696 mètre.
Pole ou perch (5 $\frac{1}{2}$ yards)........	5,02911 mètres.
Furlong (220 yards)............	201,16437 mètres.
Mile (1760 yards)	1609,3149 mètres.

MESURES DE SUPERFICIE

ANGLAISES.	FRANÇAISES.
Yard carré....................	0,836097 mètre carré.
Rod (perch carré).............	25,291939 mètres carrés.
Rood (1210 yards carrés)........	10,116775 ares.
Acre (4840 yards carrés)........	0,404671 hectare.

MESURES DE CAPACITÉ

ANGLAISES.	FRANÇAISES.
Pint ($\frac{1}{8}$ de gallon)..............	0,5679 litre.
Quart ($\frac{1}{4}$ de gallon)............	1,1359 litre.
Gallon impérial................	4,543458 litres.
Peck (2 gallons)...............	9,086916 litres.
Bushel (8 gallons)..............	36,34766 litres.
Sack (3 bushels)...............	1,09043 hectolitre.
Quarter (8 bushels)	2,90781 hectolitres.
Chaldron (12 sacks)............	13,08516 hectolitres.

Poids.

ANGLAIS. — TROY.	FRANÇAIS.
Grain (24e partie du pennyweight).	6,479895 centigrammes.
Pennyweight (20e d'once).........	1,555175 gramme.
Once (12e de livre troy)........	31,103496 grammes.
Livre troy impérial (5760 grains)..	373,241948 grammes.

ANGLAIS. — AVOIRDUPOIS.	FRANÇAIS.
Dram (16e d'once)..............	1,771846 gramme.
Ounce (16e de la livre)..........	28,349540 grammes.
Livre avoirdupois, 7000 grains....	453,592615 grammes.
Quintal (112 livres).............	50,802 kilogrammes.
Ton (20 quintaux)..............	1016,048 kilogrammes.

Il y a en Angleterre deux espèces de livres légales, l'une nommée *livre de troy*, l'autre *livre avoirdupois*. La première est employée pour peser les matières d'or et d'argent.

Monnaies

	ANGLAISES.	FRANÇAISES.
Or.	*Livre sterling*, monnaie de compte.	25,21 francs.
	Souverain de 20 schillings....	25,21 francs.
	Guinée de 21 schillings......	26,47 francs.
	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de guinée, à proportion.	»
Argent.	*Schilling*, depuis 1818.......	1,16 franc.
	Crown ou couronne, id......	5,81 francs.
	3, 1, $\frac{1}{2}$ schilling, à proportion.	»
Billon.	Penny...............	1 décime.

États-Unis d'Amérique.

Poids et mesures comme en Angleterre.

MONNAIES. — *Or.*	Pièce de 20 doll. ou double aigle, depuis 1849.	103,64
	Pièce de 10 dollars ou aigle, depuis 1837...	51,82
	Pièce de 5 dollars ou $\frac{1}{2}$ aigle..............	25,91
	Pièce de 2 $\frac{1}{2}$ dollars ou $\frac{1}{4}$ d'aigle...........	12,95
	Pièce de 1 dollar en or, depuis 1849.......	5,18
	Monnaie réelle de compte 100 cents.	
Argent.	Dollar ou 100 cents, depuis 1837..........	5,34
	$\frac{1}{2}$ dollar ou 50 cents..................	2,67
	$\frac{1}{4}$ dollar ou 25 cents..................	1,33
	One dime (1 dime), ou 10 cents..........	0,53
	Half dime ($\frac{1}{2}$ dime), ou 5 cents............	0,26

Hollande.

La Hollande a adopté le système métrique en 1820.

Le mètre s'appelle *aune;* le décimètre, *palme;* le centimètre *duin;* le millimètre, *streep*. 10 aunes font une chaîne ou *rœde;* 1000 aunes font un *mille*.

Pour les liquides, le litre s'appelle *kan*; le décilitre, *maatje;* le centilitre, *vingerhoed*. 100 kan font une cuve ou tonneau.

Pour les graines, le litre s'appelle *kop*; le décilitre, *maatje*. 10 kop font un *schepel;* 100 kop font un *mudde* ou *zak*.

Le *pond* est le kilogramme, et se divise en parties décimales successives, nommées : *ons, lood, wigtje, korrel*.

Bade.

Les mesures françaises ont été adoptées, avec quelques modifications, dès 1810, dans le grand-duché de Bade.

Le *pied* vaut 0,3 mètre. Il se divise en 10 *pouces*, 100 *lignes*, 1000 *points;* 2 pieds font une *aune;* 6 pieds, une *toise;* 10 pieds une *perche*. Le *mille* est de 8888 mètres, ou de 12 $\frac{1}{2}$ au degré.

L'*arpent* est de 400 perches carrées.

La *livre* est de 500 grammes. Les divisions décimales portent les noms de *zehnling, centass, pfenning, as*. 10 livres font un *stein*, 100 livres un *quintal*.

Prusse.

Un système uniforme a été adopté en 1826, pour tous les Etats prussiens.

LONGUEURS. *Pied du Rhin*, 0,31385 mètre. Le *pied* se divise en 12 *pouces*. L'*aune* est de 25,5 pouces. La *toise* est de 6 pieds. Le *ruthe* (ou la perche) est de 12 pieds; la toise et le ruthe se divisent en parties décimales. Le *mille* est de 2000 ruthes et vaut 7532 mètres.

MESURES AGRAIRES. *Morgen* de 180 ruthes carrés, 25,52 ares. Un *huffe* vaut 30 morgen.

MESURES POUR LES LIQUIDES. *Eimer,* 68,690 litres. L'eimer se divise en 2 *anker,* et en 60 *quarts* ou *maass.* L'*ohm* est de 2 eimer, l'*oxhoft* de 3 eimer. Le *tonneau* de bière contient 100 maass.

MESURES POUR LES GRAINS. *Scheffel,* 54,952 litres. Le *tonneau* contient 4 scheffel. Le scheffel se divise en 16 *metze* et en 48 *quarts.*

POIDS. *Livre de Cologne,* 467,702 grammes. La livre se divise en 32 *loth* et 128 *quintin.* Le *quintal* est de 100 livres, le *last* maritime de 4000 livres.

MONNAIES.—*Or.*	Ducat fin (titre 986)......................	11f,85
	Frédéric (titre 903)......................	20f,78
	Double et ½, à proportion.	
Argent.	Thaler de 30 silbergos (titre 750)..........	3f,71
	Ecu de convention (30 juillet 1838)........	7f,39

Wurtemberg.

Le *pied* vaut 0,2864 mètre. Il se subdivise en 10 pouces, 100 lignes, 1000 points. La *toise* vaut 6 pieds, la *perche* 10 pieds.

L'*arpent* de Stuttgard vaut 47,28 ares.

Le *fuder* pour les liquides vaut 2140 litres. Il se divise en 6 *ohm,* 96 *immi,* 960 *maas,* et 3840 *schopf.*

Le *scheffel* des graines vaut 178,3 litres. Il se divise en 8 *immi,* 32 *vierling* ou *unze,* 128 *achtel,* 256 *masslein.*

La *livre* vaut 467,8 grammes. Elle se divise en 32 *loth* et 128 *drachmes.*

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES.

Problèmes divers.

Problème I. 48 mètres d'étoffes ont coûté 150 francs. Combien coûteront 60 mètres de la même étoffe ?

Puisque 48 *mètres d'étoffe ont coûté* 150 *francs, un seul mètre coûtera* 48 *fois moins, soit* $\frac{150^{fr.}}{48}$; 60 *mètres coûteront* 60 *fois plus qu'un mètre, soit* $\frac{150 \times 60}{48} = 187,50.$

Problème II. 48 mètres 50 cent. d'étoffe ont coûté 157 francs 45 c. Combien coûteront 62 mètres 32 cent. ?

Je cherche d'abord le prix du mètre ; *on sait que pour l'obtenir il faut diviser la somme payée* $157^f,45$ *par la quantité d'étoffe achetée* $48,5^m$; *le prix du mètre est donc* $\frac{157,45}{48,5}$. *Connaissant le prix du mètre, il est facile de calculer ce que coûtera une quantité quelconque d'étoffe* ; *il suffit de multiplier le prix du mètre par cette quantité d'étoffe. Ainsi* $62,32^m$ *coûteront* $\frac{157,45 \times 62,32}{48,5} = 202^f,32.$

Pour abréger, on dispose le raisonnement de la manière suivante :

$48,5^m$ coûtent. . . 157,45

1^m. . . . . $\frac{157,45}{48,5}$

$62,32^m$ . . . . . . $\frac{157,45 \times 62,32}{48,5} = 202,31.$

Dans le calcul, on a négligé les millièmes, ce qui donne le résultat à moins d'un demi-centième près.

Problème III. On veut échanger 50 mètres d'un drap qui

vaut 12 francs 75 c. le mètre, contre de la soie qui vaut 8 francs 50 c. le mètre. Quelle quantité de soie doit-on recevoir en échange?

La valeur des 50 *mètres de drap est* 12,75×50. *On obtiendra la quantité de soie qui a même valeur en divisant cette somme par le prix du mètre* 8,50, *ce qui donne*

$$\frac{12,75\times50}{8,50}=\frac{12,75\times100}{17}=\frac{1275}{17}=75^{m}.$$

On a multiplié les deux termes de la fraction par 2, *afin de remplacer* 50 *par* 100, *ce qui simplifie les calculs. Ainsi on devra recevoir* 75 *mètres de soie en échange.*

Problème IV. Une locomotive, qui fait 6 lieues à l'heure, a employé 10 heures pour parcourir une certaine distance. Combien d'heures emploierait la locomotive pour franchir la même distance, si elle faisait 8 lieues à l'heure?

Puisque la locomotive parcourt 6 *lieues dans une heure, elle a parcouru en* 10 *heures une distance* 10 *fois plus grande, soit* $6\times10=60$ *lieues. Si maintenant la locomotive fait* 8 *lieues par heure, il lui faudra autant d'heures pour parcourir cette même distance que* 8 *lieues sont contenues de fois dans* 60 *lieues. En divisant* 60 *par* 8, *on trouve pour quotient* $7+\frac{1}{2}$. *Ainsi, avec la nouvelle vitesse, la locomotive emploiera* 7 *heures et demie ou* 7 *heures* 30 *minutes pour parcourir la distance donnée.*

Problème V. Une fontaine a mis 2 h. 52 m. 46 s. à remplir un bassin d'une capacité de 7 mètres cubes, 46 décimètres cubes. Combien de temps mettra-t-elle pour remplir un bassin d'une capacité de 12 mètres cubes, 620 décimètres cubes?

Je réduis le temps en secondes; la fontaine, en 10366 *secondes, a rempli le premier bassin, dont la capacité est de* 7046 *litres; elle donne donc en une seconde une quantité d'eau égale à* $\frac{7046}{10366}$ *litre. La capacité du second bassin est de* 12620 *litres; autant de fois ce second bassin contiendra la quantité d'eau versée en une seconde, autant de secondes la fontaine emploiera pour la remplir. Il faut donc diviser* 12620 *par* $\frac{7046}{10366}$, *ce qui donne*

$$\frac{12620\times10366}{7046}=18566 \textit{ secondes}=5\,h.\,9\,m.\,26\,s.,$$ *en négligeant une fraction de seconde.*

Problème VI. Deux fontaines coulent dans un bassin ; la première, coulant seule, remplit le bassin en 5 heures ; la seconde, coulant seule, en 7 heures. On demande combien de temps les deux fontaines, coulant ensemble, mettront pour remplir le bassin.

Je prends pour unité de volume la capacité du bassin. La première fontaine, remplissant le bassin en 5 heures, donne en une heure une quantité d'eau marquée par la fraction $\frac{1}{5}$; la seconde, remplissant le bassin en 7 heures, donne en une heure une quantité d'eau marquée par la fraction $\frac{1}{7}$. Les deux fontaines, coulant ensemble, verseront en une heure une quantité d'eau égale à $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35}$. Autant le bassin contiendra de fois cette quantité d'eau versée en une heure, autant d'heures il faudra aux deux fontaines coulant ensemble pour remplir le bassin. Je divise donc 1 par $\frac{12}{35}$, ce qui donne le quotient $\frac{35}{12}=2$ heures $+\frac{11}{12}$.

Je réduis cette fraction d'heure en minutes : puisqu'une heure vaut 60 minutes, les $\frac{11}{12}$ d'une heure valent les $\frac{11}{12}$ de 60 minutes, ce qui fait $\frac{60\times 11}{12}=55^{m}$. Dans l'exemple actuel, on aurait pu opérer immédiatement la conversion en multipliant les deux termes de la fraction par 5, ce qui fait $\frac{55}{60}$ ou 55 minutes. Ainsi les deux fontaines coulant ensemble mettront 2 heures 55 minutes pour remplir le bassin.

Problème VII. Il faut 10 quintaux de foin pour nourrir 8 chevaux pendant 15 jours. Combien de foin faudra-t-il pour nourrir 13 chevaux pendant 20 jours ?

Je cherche d'abord ce que mange un seul cheval en un jour. 8 chevaux en 15 jours mangent 10 quintaux ou 1000 kilogr. ; un cheval en 15 jours mange une quantité de foin 8 fois plus petite, soit $\frac{1000}{8}$; un cheval en un jour mange une quantité 15 fois plus petite, soit $\frac{1000}{8\times 15}$.

Maintenant que l'on connaît ce que mange un cheval en un jour, si l'on multiplie cette quantité par 13, on aura ce que mangent 13 chevaux en un jour ; si l'on multiplie ensuite par 20, on aura ce que mangent 13 chevaux en 20 jours. Ainsi, la quantité cherchée est, à moins d'un demi-kilogramme près,

$$\frac{1000\times 13\times 20}{8\times 15}=\frac{1000\times 13\times 10}{4\times 15}=\frac{130000}{60}=\frac{13000}{6}=2167^{k}.$$

Afin d'embrasser d'un seul coup d'œil la suite des raisonnements, on les dispose en tableau de cette manière :

8 chevaux en 15 jours mangent 1000 k. de foin,

1 . . . . *en* 15 . . . . $\frac{1000}{8}$,

1 . . . . *en* 1 . . . . $\frac{1000}{8\times15}$,

13. . . . *en* 1 . . . . $\frac{1000\times13}{8\times15}$,

13. . . . *en* 20 . . . . . . $\frac{1000\times13\times20}{8\times15}=2167^{k}$.

Problème VIII. Avec 28,5 k. de fil, on a fabriqué une pièce de toile ayant 120 mètres de longueur sur 1 mètre 25 cent. de largeur. Combien de mètres d'une toile semblable à la première, mais ayant 0,92 de largeur, pourrait-on fabriquer avec 40k. de fil?

J'évalue les largeurs en centimètres, et je cherche d'abord quelle longueur on pourrait fabriquer avec un kilogramme de fil, si la toile n'avait qu'un centimètre de largeur. La première toile a 125 centimètres de largeur; si elle n'avait qu'un centimètre de largeur, avec la même quantité de fil on en aurait fabriqué une longueur 125 fois plus grande, soit 120×125. *Pour avoir ce qu'on aurait fabriqué avec un seul kilogramme, il faut diviser cette quantité par* 28,5, *ce qui donne* $\frac{120\times125}{28,5}$.

Pour avoir ce qu'on fabriquerait avec 40 kilogrammes de fil, la largeur étant toujours d'un centimètre, il faut multiplier cette dernière quantité par 40, ce qui donne $\frac{120\times125\times40}{28,5}$. *Je suppose maintenant que la largeur de la toile soit de 92 centimètres, la longueur deviendra 92 fois plus petite, soit* $\frac{120\times125\times40}{28,5\times92}=\frac{120.25.100}{57.23}=228^{m},8$, *à moins d'un décimètre près.*

Je dispose en tableau les raisonnements :

Avec $28^{k},5$ *de fil, la largeur étant* 125^{cm}, *on fabrique* 140,

. . . 28, 5. . . , ... 1. , ... 128×125,

. . . 1 . . . , ... 1. , ... $\frac{120\times125}{28,5}$,

. . . 40 . . . , ... 1. , ... $\frac{120\times125\times40}{28,5}$,

. . . 40 . . . , ... 92. , ... $\frac{120.125.40}{28,5.92}=228^{m},8$.

Intérêts simples.

Toute valeur s'appelle un *capital ;* on évalue les capitaux au moyen de l'unité de monnaie, qui est le franc.

Lorsque le propriétaire d'un capital en cède la jouissance, il exige, en échange de cette jouissance, un bénéfice que l'on nomme *intérêt ;* le *taux* de l'intérêt est ce que rapporte le capital *cent francs* par an.

Pour combattre l'usure, la loi en France a fixé un maximum du taux de l'intérêt ; ce maximum est 5 pour 100 par an dans les transactions ordinaires, 6 pour 100 dans le commerce.

Ordinairement l'intérêt d'un capital se paye chaque année et constitue une *rente* annuelle.

PROBLÈME I. Quelle est la rente produite par un capital de 12648 francs, placé à 5 pour 100 par an ?

Puisque 100 *fr. rapportent* 5 *fr. par an, le capital un franc rapportera* 100 *fois moins, soit* $\frac{5}{100}$; *le capital* 12648 *fr. rapportera* 12648 *fois plus, soit*

$$\frac{5\times12648}{100}=\frac{12648\times5}{100}=632^{f},40.$$

PROBLÈME II. Quelle est la rente produite par un capital de 687,50 f., placé à 4,25 pour 100 par an ?

Puisque 100 *francs rapportent* 4,25 *par an, un franc rapporte* $\frac{4,25}{100}$. *Pour avoir l'intérêt d'un capital quelconque, il faut évidemment multiplier l'intérêt d'un franc par ce capital. Le capital* 687,50 *rapportera donc*

$$\frac{4,25\times687,50}{100}=\frac{687,50\times4,25}{100}=29,22 \text{ fr.}$$

en négligeant les millièmes. Ainsi :

RÈGLE I. *Pour calculer l'intérêt annuel d'un capital donné, multipliez le capital par le taux et divisez par* 100.

On divisera par 100 *en reculant la virgule de deux rangs vers la gauche.*

PROBLÈME III. Quel est l'intérêt de 12648 fr., placés à 5 pour 100 par an pendant 8 mois ?

L'intérêt d'un an est $\frac{12648\times5}{100}$. *Puisque* 8 *mois sont les* $\frac{8}{12}$ *d'un an, l'intérêt de* 8 *mois sera les* $\frac{8}{12}$ *de l'intérêt d'un an, soit*

$$\frac{12648\times5\times8}{100\times12}=\frac{12648\times5\times2}{100\times3}=\frac{4216}{10}=421,60.$$

On arrive au même résultat par une autre méthode, qui est souvent plus simple que la précédente :

Intérêt d'un an, $\frac{12648\times5}{100}=632,40.$

L'intérêt de 6 *mois est de* $\frac{1}{2}$ *de l'intérêt d'un an.*	316,20
L'intérêt de 2 *mois est de* $\frac{1}{3}$ *de l'intérêt de six mois*	105,40
L'intérêt de 8 *mois est la somme.*	421,60

PROBLÈME IV. Quel est l'intérêt de 6875 fr., placés à 4,25 pour 100 par an pendant 90 jours?

Intérêt d'un an ou de 365 *jours*. . $\frac{6875\times4,25}{100}$,

d'un jour . . $\frac{6875\times4,25}{100\times365}$,

de 90 *jours*. . $\frac{6875\times4,25\times90}{100\times365}=72,05.$

PROBLÈME V. Quel est le capital qui, placé à 5 pour 100 par an, produit une rente de 854 fr.?

Pour avoir 5 *fr. de rente, il faut un capital de* 100 *fr.; pour avoir un franc de rente, il faut un capital* 5 *fois plus petit, soit* $\frac{100}{5}$; *pour avoir* 854 *fr. de rente, il faut un capital* 854 *fois plus grand, soit*

$$\frac{100\times854}{5}=\frac{854\times100}{5}=17080^{f}.$$

PROBLÈME VI. Quel est le capital qui, placé à 4,75 pour 100 par an, produit une rente de 342,60?

La rente d'un capital quelconque est égale à l'intérêt d'un franc multiplié par le capital; réciproquement, si l'on divise la rente par l'intérêt d'un franc on obtiendra le capital. Dans l'exemple actuel, l'intérêt d'un franc est $\frac{4,75}{100}$;

le capital cherché égale donc

$$342,60 : \frac{4,75}{100} = \frac{342,60 \times 100}{4,75} = 7122,63.$$

Règle II. ***Pour calculer le capital capable de produire une rente donnée, multipliez la rente par 100 et divisez par le taux de l'intérêt.***

Problème VII. Quel est le capital qui, placé à 4,50 pour 100 par an, rapporte 500 fr. en 228 jours?

Le capital un franc, en 228 jours rapporte $\frac{4,50 \times 228}{100 \times 365}$. *L'intérêt d'un capital quelconque, pendant le même temps, est égal à l'intérêt d'un franc multiplié par ce capital; donc on obtiendra le capital cherché en divisant 500 fr. par l'intérêt d'un franc, ce qui fait*

$$500 : \frac{4,50 \times 228}{100 \times 365} = \frac{500 \times 100 \times 365}{4,50 \times 228} = 17782,50.$$

Problème VIII. A quel taux faut-il placer un capital de 5680 francs pour qu'il produise une rente de 261,28?

Cherchez le taux de l'intérêt, c'est chercher ce que rapportent 100 fr. en un an.

5680 *fr. rapportent.* . . . 261,28

1 . . . . $\frac{261,28}{5680}$

100 . . . . $\frac{261,28 \times 100}{5680} = \frac{2612,80}{568} = 4,60.$

Il faut donc placer le capital à 4,60 pour 100 par an.

Règle III. ***Pour calculer le taux de l'intérêt, multipliez la rente par 100, et divisez par le capital.***

Problème IX. Un capital de 6875 fr. a rapporté 72,05 en 90 jours. A quel taux était-il placé?

Cherchons encore ce que rapportent 100 francs en un an.

6875 *fr. en* 90 *jours rapportent.* . 72,05

Id. en 365 *jours.* . . . . $\frac{72,05 \times 365}{90}$,

100 *fr. en un an.* . . . . $\frac{72,05 \times 365 \times 100}{90 \times 6875} = 4,25.$

Problème X. Pendant combien de jours faut-il placer un capital de 6875 fr. à 4,25 pour 100 par an pour qu'il rapporte 72,05?

6875 *en un an rapportent.* . $\frac{6875 \times 4,25}{100},$

Id. *en un jour.* . $\frac{6875 \times 4,25}{100 \times 365}.$

Autant de fois l'intérêt d'un jour sera contenu dans 72,05, autant de jours on aura. Le nombre de jours cherché est donc égal à

$$\frac{72,05 \times 365 \times 100}{6875 \times 4,25} = 90 \text{ jours.}$$

Problème XI. Trouver l'intérêt d'un capital de 12648 fr. placé à intérêt simple à 5 pour 100 par an pendant 4 ans et 140 jours.

Habituellement, l'emprunteur paye chaque année l'intérêt du capital. S'il n'en est pas ainsi, si l'emprunteur ne paye l'intérêt qu'après un certain nombre d'années, on peut calculer l'intérêt total d'après deux conventions différentes. Ou bien on convient que le capital restera le même pendant toute la durée du placement, de sorte que l'intérêt de plusieurs années égale l'intérêt d'un an répété un certain nombre de fois : c'est là ce qu'on appelle *intérêt simple*. Ou bien à la fin de chaque année on ajoute au capital les intérêts de cette année, pour former un nouveau capital produisant intérêt pendant l'année suivante. Ainsi à la fin de la première année, on ajoute au capital primitif les intérêts de cette première année, ce qui donne un nouveau capital produisant intérêt pendant la seconde année; on ajoute à ce second capital les intérêts de la seconde année, ce qui donne un nouveau capital produisant intérêt pendant la troisième année, et ainsi de suite. De cette manière, le capital augmente d'année en année : c'est là ce qu'on appelle prendre les *intérêts composés*. Nous nous occuperons plus tard des questions qui se rapportent aux intérêts

composés; nous nous bornons, pour le moment, aux intérêts simples.

Intérêt d'un an	$\frac{12648 \times 5}{100} = 632,40.$	
Intérêt de 4 ans	$632,40 \times 4 =$	2529,60
Intérêt de 140 jours	$\frac{632,40 \times 140}{365} =$	242,56
L'intérêt de 4 ans et 140 jours égale		2772,16

Problème XII. Pendant combien de temps faut-il placer un capital de 12648 fr., à intérêt simple à 5 pour 100 par an, pour qu'il produise 2772,16?

En un an le capital produit $\frac{12648 \times 5}{100}$. *Autant de fois l'intérêt d'un an sera contenu dans 2772,16, autant d'années nous aurons. Le temps cherché est donc*

$$\frac{2772,16 \times 100}{12648 \times 5} = 4^{a} + \frac{24256}{63240},$$

On trouve 4 ans plus une fraction d'année.

On convertira cette fraction d'année en jours, en la multipliant par 365, ce qui donne

$$\frac{24256 \times 365}{63240} = 140 \text{ jours.}$$

Ainsi la durée du placement est 4 ans et 140 jours.

Rentes sur l'État.

La *dette publique* est de plusieurs sortes. Le *quatre et demi pour cent* est un titre portant un capital nominal de 100 fr., et produisant 4,50 de rente. Le *trois pour cent* est un titre portant un capital nominal de 100 fr., et produisant 3 fr. de rente.

Problème XIII. Une personne achète du 4 et demi pour cent au cours de 95 fr. A quel taux place-t-elle son argent?

Acheter du $4+\frac{1}{2}$ pour cent au cours de 95 fr., c'est acheter pour 95 fr. une rente de 4,50. On dira donc

le capital 95 fr. pvoduit une rente de 4,50

Le capital 100 *fr.* . . . . $\frac{4,50\times100}{95}=4,737.$

On place donc son argent à 4,737 pour cent par an.

Problème XIV. Combien coûtent 500 francs de rente 3 pour cent, au cours de 70 fr. ?

3 *fr. de rente coûtent.* . . 70 *fr.*

500. . . . . $\frac{70\times500}{3}=11666,67.$

Problème XV. Si le 4 et demi pour cent est à 95 fr., quel devrait être le cours correspondant du 3 pour cent?

4,50 *de rente coûtent* . . 95 *fr.*

3. . . . . $\frac{95\times3}{4,50}=63,33.$

Escompte commercial.

Dans le commerce, on appelle *billet* ou *effet* une obligation par laquelle un négociant s'engage à payer une certaine somme à une époque déterminée.

Il est clair que la valeur *actuelle* d'un billet est moindre que la somme inscrite sur le billet, laquelle n'est exigible qu'au jour de l'échéance. Lorsque le détenteur d'un billet veut l'échanger contre de l'argent comptant, il s'adresse ordinairement à un banquier, qui lui fait subir une retenue que l'on nomme *escompte.*

Le taux de l'escompte est la retenue que l'on fait subir à un billet de 100 francs payable dans un an. Ainsi, si le taux de l'escompte est de 6 pour cent par an, le banquier fera subir à un billet de 100 francs payable dans un an une retenue de 6 francs; en échange de ce billet, il donnera donc 94 francs comptant.

Problème XVI. Escompter à 5 pour 100 par an un billet de 3780 francs payable dans 90 jours.

Escompte de 100 *fr. pour un an. . . . .* 5 *fr.*

. . . . . . de 3780. . . . . $\frac{5\times3780}{100}$

Escompte de 3780 *pour* 90 *jours . . . .* $\frac{5\times3780\times90}{100\times365}=46{,}60$

Le banquier fera subir au billet une retenue de 46,60 ; *il donnera donc en échange du billet une somme de* 3733,40.

Règle. *Pour trouver l'escompte commercial, on opère comme si l'on calculait l'intérêt de la somme inscrite sur le billet depuis le moment actuel jusqu'à l'échéance.*

Questions sur les sociétés.

Problème XVII. Trois négociants se sont associés : le premier a mis dans la société 12000 fr., le second 10500 fr., le troisième 7840 fr. A la fin de l'année les bénéfices s'élèvent à 6375 fr. Partager ce bénéfice proportionnellement aux mises.

Le capital social ou la somme des mises est de 30340 *fr. Ce capital a produit un bénéfice de* 6375 *fr. ; à une mise d'un franc il revient donc* $\frac{6375}{30340}$. *Il suffit maintenant, pour avoir la part de chaque associé, de multiplier le bénéfice d'un franc par sa mise de fonds. Ainsi :*

Part du 1[er] . . . . . . $\frac{6375\times12000}{30340}=2521{,}42$

— *du* 2[me] . . . . . . $\frac{6375\times10500}{30340}=2206{,}25$

— *du* 3[me]. . . . . . $\frac{6375\times7840}{30340}=1647{,}33$

6375,00

Il se présente ici une vérification ; en additionnant les parts on doit reproduire le bénéfice total.

Problème XVIII. Trois associés ont fait un bénéfice de 1250 fr. Le premier a mis dans la société 3000 fr. pendant

6 mois, le second 4000 fr. pendant 8 mois, le troisième 2000 fr. pendant 10 mois. Partager le bénéfice proportionnellement au temps et au montant de chaque mise.

Le premier a mis 3000 *fr. pendant six mois; c'est comme s'il avait mis* $3000 \times 6 = 18000$ *fr. pendant un mois.*

Le second a mis 4000 *fr. pendant* 8 *mois; c'est comme s'il avait mis* $4000 \times 8 = 32000$ *fr. pendant un mois.*

Le troisième a mis 2000 *fr. pendant* 10 *mois; c'est comme s'il avait mis* $2000 \times 10 = 20000$ *fr. pendant un mois.*

La question est ainsi ramenée au problème précédent. On peut supposer que les trois associés aient mis dans la société, le premier 18000 *fr., le second* 32000, *le troisième* 20000 *fr. pendant le même temps : il faut répartir le bénéfice proportionnellement aux mises.*

Part du 1er . . . . . . $\frac{1250 \times 18000}{70000} = 321,43$

— *du* 2me. . . . . . $\frac{1250 \times 32000}{70000} = 571,43$

— *du* 3me. . . . . . $\frac{1250 \times 20000}{70000} = 357,14$

1250,00

PROBLÈME XIX. Un arrondissement, composé de quatre cantons, doit fournir à la conscription un contingent de 162 soldats. La population du premier canton est de 30100 habitants, celle du deuxième de 28300, celle du troisième de 15200, et celle du quatrième de 7400. Répartir le contingent entre les divers cantons d'après la population.

La population totale de l'arrondissement est de 81000 *habitants, ce qui fait un soldat pour* $\frac{81000}{162}$ *ou pour* 500 *habitants. Autant de fois la population de chaque canton contiendra* 500, *autant de soldats ce canton devra fournir. On trouve ainsi :*

Pour le 1er *canton*. . . . . . $\frac{30100}{500} = \frac{30100 \times 2}{1000} = 60,2,$

— *le* 2me. . . . . $\frac{28300 \times 2}{1000} = 56,6,$

— *le* 3me. . . . . $\frac{15200 \times 2}{1000} = 30,4,$

— *le* 4me . . . . $\frac{7400\times2}{1000}=14,8.$

Mais la répartition entre les cantons doit évidemment être opérée en nombres entiers ; comme il est impossible dans ce cas de l'effectuer exactement, on la fera aussi exactement que possible. Si l'on attribue d'abord 60 *soldats au* 1er *canton,* 56 *au* 2me, 30 *au* 3me *et* 14 *au* 4me, *il reste deux hommes qu'il s'agit d'attribuer à deux des quatre cantons.*

On pourrait croire au premier abord qu'il faut prendre en excès les deux nombre 56,6, *et* 14,8, *qui renferment les fractions les plus fortes, ce qui ferait* 57 *soldats pour le* 2me *canton et* 15 *pour le* 4me. *Mais on se tromperait en agissant ainsi. Car il ne faut pas considérer seulement la valeur absolue de l'augmentation du nombre fractionnaire, il faut encore comparer cette augmentation au nombre des habitants.*

Je prends en excès les quatre nombres fractionnaires. En prenant 61 *pour le* 1er *canton, l'augmentation absolue serait* 0,8, *ce qui fait par habitant une augmentation relative de* $\frac{0,8}{30100}=0,00026.$

En prenant de même l'augmentation relative à un habitant pour les autres cantons, on trouve :

Pour le 1er *canton, augmentation relative* . . . $\frac{0,8}{30100}=0,00026,$

— *le* 2me . . . . $\frac{0,4}{28300}=0,00014,$

— *le* 3me. . . . . $\frac{0,6}{15200}=0,00039,$

— *le* 4me . . . . $\frac{0,2}{7400}=0,00027.$

On voit que les deux augmentations relatives les plus petites sont celles du 1er *et du* 2me *canton. La meilleure répartition est donc de demander* 61 *soldats au* 1er *canton,* 57 *au* 2me, 30 *au* 3me, 14 *au* 4me.

Questions sur les mélanges et les alliages.

PROBLÈME I. On mélange 80 litres de vin à 50^c^ le litre avec 100 de vin à 35^c^ le litre. Quelle sera la valeur d'un litre de mélange?

80 *litres du* 1er *vin valent*. . . .	$0,50\times80=40$ *fr.*
100 . . . *du* 2me.	$0,35\times100=35$
180 *litres de mélange valent* . . .	$40+35=75$

1 litre de mélange vaut. . . . $\frac{75}{180} = 0^l,417$, *à un demi-millième près.*

Problème II. Dans quel rapport faut-il mélanger deux vins qui valent l'un 45^c le litre, l'autre 33^c, afin d'obtenir un mélange valant 40^c le litre?

J'écris les prix des deux vins à mélanger, et en regard à gauche le prix du mélange.

$$40 \left\{ \begin{array}{ccc} 45 & \searrow\swarrow & 7 \\ 33 & \nearrow\nwarrow & 5 \end{array} \right.$$

Je prends les différences entre le nombre 40 et les deux nombres 45 et 33, et j'écris les différences 5 et 7 en croix. Je dis qu'en mélangeant 7 litres du premier vin avec 5 litres du second, on formera le mélange demandé. En effet, comme on vend le mélange 40^c, chaque litre du premier vin que l'on introduit dans le mélange occasionne une perte de 5^c; chaque litre du second vin produit au contraire un gain de 7^c. Si donc on mélange 7 litres du premier vin avec 5 litres du second, il y aura, d'une part, une perte 5×7, d'autre part un gain 7×5. La perte est égale au gain et le mélange vaut bien 40^c le litre.

On indique ordinairement la composition d'un mélange en indiquant les quantités des substances mélangées qui entrent dans la composition d'une unité du mélange. En mélangeant 7 litres du premier vin avec 5 litres du second, on fait 12 litres de mélange. Un litre de mélange est donc formé de $\frac{7}{12}$ *du premier vin et de* $\frac{5}{12}$ *du second.*

Problème III. Combien faut-il mélanger de vin à 45^c le litre et de vin à 35^c pour former 150 litres de mélange à 40^c?

En appliquant la règle précédente, on trouve que, pour former un litre du mélange, il faut prendre $\frac{7}{12}$ *du premier vin et* $\frac{5}{12}$ *du second. Pour former 150 litres de mélange, il faudra prendre des quantités 150 fois plus grandes, soit*

Du 1er vin. . . . . . . $\frac{7\times150}{12} = 87,5,$

Du 2me vin. . . . . . . $\frac{5\times150}{12} = 62,5.$

Problème IV. Combien faut-il mélanger de vin à 45c le litre avec 28 litres de vin à 33c, pour former un mélange à 40c?

D'après la règle pratique, on forme le mélange demandé en mélangeant 7 litres du premier avec 5 litres du second.

Avec 5 litres du second vin, il faut mettre 7 litres du premier.

— 1. . . . . $\frac{7}{5}$. . . . .

Avec 28 litres du second vin. . . . . . $\frac{7\times28}{5}=\frac{7\times56}{10}=39^{l},2.$

Problème V. Combien faut-il mettre d'eau dans 125 litres de vin à 50c, pour que le prix du mélange s'abaisse à 42c ?

On peut considérer l'eau comme du vin à 0c, et alors la question se traite comme la précédente.

42 { 50 ⤫ 42
   { 0 ⤫ 8

Dans 42 litres de vin, il faut mettre 8 *litres d'eau.*

— 1 . . . . $\frac{8}{42}$.

—125 . . . . $\frac{8\times125}{42}=23^{l},8.$

Problème VI. On forme le laiton en fondant ensemble 30 kilogrammes de zinc avec 70 de cuivre. Le kilogramme de cuivre valant 2f,70, et le kilogramme de zinc 0,90, on demande le prix du kilogramme de laiton.

Un kil. de laiton étant composé de 0k,7 *de cuivre et de* 0k,3 *de zinc,*

0k,7 *de cuivre coûtent* . . . . . 2,70×0,7= 1,89,

0 ,3 *de zinc*. . . . . 0,90×0,3= 0,27,

1k *de laiton coûtera* . . . . 2,16.

Problème VII. Le bronze des canons et des statues est formé de 11 parties d'étain et de 100 parties de cuivre. Combien un canon pesant 1200k contient-il de cuivre et d'étain?

Problème VIII. On obtient le métal des cloches en fondant

ensemble 110 kilogr. d'étain avec 390 de cuivre, 5 de zinc et 4 de plomb. Quels poids de ces différents métaux faut-il mettre dans le creuset pour faire une cloche pesant 5000 kil. ?

Problème IX. On a fondu ensemble deux lingots d'argent; le premier, au titre 0,92, pèse 1240 grammes; le second, au titre 0,80, pèse 786 gr. On demande le titre du lingot ainsi obtenu.

Les lingots d'argent contiennent ordinairement une petite quantité de cuivre. On appelle *titre* du lingot la quantité d'argent pur que renferme un gramme du lingot.

Le premier lingot contient. . . $0{,}92 \times 1240 = 1140{,}80$ *d'argent pur.*
Le second. . . . . $0{,}80 \times 786 = 628{,}80$

Le nouveau pèse 2026 *gr. et contient. . . . .* 1769,60 *d'argent.*

1 *gr. du nouveau lingot contient* $\frac{1769{,}60}{2026} = 0{,}873$ *à un demi-millième près.*

Tel est le titre du nouveau lingot.

Problème X. On a deux lingots d'argent; l'un au titre 0,95, l'autre au titre 0,76. Dans quel rapport faut-il les allier pour former un lingot au titre de 0,90 ?

On traitera cette question comme une question de mélange. On écrira les titres des deux lingots, et en regard le titre de l'alliage; puis on prendra les deux différences que l'on écrira en croix.

90	95	14
	76	5

Il faut allier 14 *gr. du premier lingot avec* 5 *gr. du second. En effet, pour chaque gramme du premier lingot que l'on met dans le creuset, il y a un excès de* 0,5 *d'argent pur ; pour chaque gramme du second lingot, il y a au contraire un déficit de* 0,14 *d'argent pur. Si on allie* 14 *gr. du premier lingot avec* 5 *gr. du second, l'excès et le déficit sont égaux, et l'on obtient un nouveau lingot qui est exactement au titre* 0,90.

Problème XI. Un lingot d'argent, au titre 0,94, pèse 3450 grammes. Combien faut-il ajouter de cuivre pour que le titre s'abaisse à 0,90?

Le lingot contient $0,94 \times 3450 = 3243$ *d'argent pur; pour que le titre devienne* 0,90, *il faut que le lingot pèse* $\frac{3243}{0,90} = 3603,33$. *On ajoutera donc* 153,33 *de cuivre.*

Problème XII. Quelle est la valeur d'un kilogramme d'argent pur, au change des monnaies?

Le titre des monnaies est 0,90. *La loi a fixé à* 2 *francs le prix de fabrication d'un kilogramme d'argent monnayé.*

Un kilogramme d'argent monnayé ne renferme que 900 *grammes d'argent pur ; ces* 900 *grammes valent, non pas* 200 *francs, puisqu'il y a* 2 *francs de frais de fabrication, mais* 198 *fr. Un kilogramme d'argent pur vaut donc* $\frac{198 \times 1000}{900} = 220$ *fr.*

Problème XIII. Quelle est la valeur d'un kilogramme d'or pur, au change des monnaies?

D'après la loi, la monnaie d'or a une valeur 15 *fois et demie plus grande que la monnaie d'argent, à poids égal. Le prix de fabrication du kilogramme de monnaie d'or a d'ailleurs été fixé à* 6 *fr.*

Un kilogramme d'or monnayé ne renferme que 900 *grammes d'or pur, qui valent* $200 \times 15,5 - 6 = 3094$ *francs. Un kilogramme d'or pur vaut donc* $\frac{3094 \times 1000}{900} = 3437^f,78$.

Problème XIV. On demande à quelle valeur s'élève la tolérance des poids sur les différentes pièces d'argent.

Problème XV. On demande à quelle valeur s'élève la tolérance du poids sur les différentes pièces d'or.

Problème XVI. On demande à quelle valeur s'élève la tolérance du titre pour les pièces d'or et d'argent.

On demande quelle est la plus grande et la plus petite valeur que puissent avoir les pièces d'or et d'argent, en tenant compte de la tolérance du poids et du titre.

Problème XVII. Combien payerait-on, au change des monnaies, un vase d'argent au premier titre, pesant 475 grammes?

La loi ne reconnaît que deux titres pour les ouvrages d'argent. Le premier titre est de 0,950, *le second* 0,800. *Elle tolère* 5 *millièmes d'erreur.*

Problème XVIII. Combien payerait-on, au change des monnaies, un vase d'or au troisième titre, pesant 475 grammes?

La loi reconnaît trois titres pour les ouvrages d'or. Le premier titre est 0,92 *le second,* 0,840, *le troisième* 0,750. *Elle tolère* 3 *millièmes d'erreur.*

DEUXIÈME PARTIE

LIVRE IV.

PUISSANCES ET RACINES.

CHAPITRE I.

CARRÉS ET RACINES CARRÉES.

Carrés.

186. On appelle *puissance* d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre, et, pour simplifier la notation, on indique par un exposant le nombre des facteurs. La seconde puissance, ou le produit de deux facteurs égaux, porte le nom spécial de *carré,* parce que le nombre d'unités de surface contenues dans la figure géométrique nommée carré est égal à la seconde puissance du nombre d'unités de longueur contenues dans le côté de figure. Je rappelle, en effet, la manière dont j'ai fait voir, dans le système métrique, que le décamètre carré vaut cent mètres carrés. Je conçois un carré dont le côté ait 5 mètres de longueur : on peut décomposer ce carré en cinq bandes renfermant chacune cinq petits carrés ou 5 mètres carrés, et la figure entière contient 5 fois 5 ou 5^2 mètres carrés.

Ainsi *on appelle carré d'un nombre le produit de ce nombre multiplié par lui-même.* Les carrés des nombres entiers consécutifs forment les nombres carrés.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,...

187. THÉORÈME I. *On élève au carré l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, en doublant le nombre des zéros.* Ainsi les carrés de 10, 100, 1000,... sont 100, 10000, 1000000,....

188. THÉORÈME II. *On élève au carré le produit de plusieurs facteurs, en élevant séparément chaque facteur au carré.* Par exemple

$$(5\times 8)^2=(5\times 8)\times(5\times 8)=5\times 8\times 5\times 8=5^2\times 8^2.$$

COROLLAIRE. *Pour élever au carré un nombre entier terminé par des zéros, on peut négliger d'abord les zéros, puis en ajouter un nombre double à la suite du résultat.* En effet :

$$(70)^2=(7\times 10)^2=7^2\times 10^2=49\times 100=4900.$$

189. THÉORÈME III. *On élève au carré le produit de plusieurs nombres affectés d'exposants quelconques, en doublant tous les exposants.* Ainsi

$$(5^3\times 8^2)^2=(5^3\times 8^2)\times(5^3\times 8^2)=5^3\times 8^2\times 5^3\times 8^2=5^6\times 8^4.$$

190. THÉORÈME IV. *On élève une fraction au carré, en élevant au carré chaque terme séparément.* En effet

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5\times 5}{7\times 7}=\frac{5^2}{7^2}.$$

Pour élever au carré un nombre fractionnaire, on le met d'abord sous forme de fraction.

COROLLAIRE. *Le carré d'une fraction ordinaire irréductible est une fraction irréductible dont les deux termes sont des nombres carrés.* En élevant au carré la fraction irréductible $\frac{10}{21}$, on forme une fraction $\frac{10^2}{21^2}$, qui est aussi irréductible ; car lorsque deux nombres, 10 et 21, sont premiers entre eux, leurs carrés sont aussi premiers entre eux. De plus, les deux termes de la nouvelle fraction sont des nombres carrés.

191. REMARQUE. Le carré d'un nombre plus grand que l'unité est plus grand que ce nombre ; car, le multiplicateur étant plus grand que l'unité, le produit est plus grand que le multiplicande.

Au contraire, le carré d'un nombre plus petit que l'unité est plus petit que ce nombre.

Lorsqu'un nombre augmente, son carré augmente ; car les deux facteurs du produit augmentant, il est clair que le produit augmente. Lorsqu'un nombre diminue, son carré diminue.

192. THÉORÈME V. *Lorsqu'un nombre entier n'est pas un nombre carré, il n'existe pas de nombre fractionnaire qui, élevé au carré, reproduise ce nombre entier.*

Soit un nombre entier 28 non carré ; ce nombre est compris entre les deux carrés consécutifs 25 et 36. Il n'existe pas de nombre entier qui, élevé au carré, reproduise 28 ; le nombre 5 donne un carré trop petit, le nombre 6 un carré trop grand. Mais n'existe-t-il pas entre 5 et 6 un nombre fractionnaire dont le carré reproduise exactement le nombre 28 ? Je suppose que le nombre 5 plus une fraction irréductible $\frac{4}{7}$ jouisse de cette propriété ; en mettant ce nombre fractionnaire sous forme de fraction, la fraction $\frac{39}{8}$ ainsi obtenue est aussi irréductible ; car si on pouvait la simplifier, en extrayant les entiers, on retrouverait 5 plus une fraction égale à la fraction irréductible $\frac{4}{7}$ et plus simple que celle-ci, ce qui est impossible. Le carré de la fraction irréductible $\frac{39}{7}$ est aussi une fraction irréductible $\frac{39^2}{7^2}$; donc ce carré ne peut être égal à un nombre entier 28.

193. THÉORÈME VI. *Lorsque les deux termes d'une fraction ordinaire irréductible ne sont pas des nombres carrés, il n'existe pas de fraction qui, élevée au carré, reproduise exactement la fraction proposée.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{20}{49}$ dont le numérateur n'est pas un nombre carré. Je veux démontrer que cette fraction ne peut être égale au carré d'une fraction, que je supposerai réduite à sa plus simple expression, et que je représenterai par

Je considère maintenant un nombre plus grand que 100, par exemple, 4587.

45.87	67
36	127
98.7	7
889	889
98	

Le plus grand carré contenu dans ce nombre étant au moins égal à 100, la racine cherchée est au moins égale à 10; elle se compose donc d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. Le nombre proposé contient le carré de la racine, plus le reste; or, le carré de la racine, d'après ce qui a été dit, est formé de trois parties: le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, le carré des unités. La première partie, le carré des dizaines, exprimant des centaines, doit être contenue dans les 45 centaines du nombre proposé; je vais démontrer ce théorème général: *La racine du plus grand carré contenu dans les centaines d'un nombre exprime les dizaines de la racine de ce nombre.*

Le nombre 45 est compris entre les deux carrés consécutifs 36 et 49, carrés de 6 et de 7. Le nombre proposé 4587 contient donc 36 centaines ou le carré de 60; il ne contient pas 49 centaines ou le carré de 70. Il en résulte que la racine cherchée est ou 60, ou un nombre plus grand que 60, mais plus petit que 70; en un mot, le chiffre des dizaines de la racine est 6.

On connaît les dizaines de la racine; si du nombre proposé on retranche le carré des dizaines 3600, le reste 987 ne renferme plus que les deux autres parties du carré, savoir: le double produit des dizaines par les unités, ou le produit de 12 dizaines par le chiffre des unités, et le carré des unités. La première partie, exprimant des dizaines, est contenue dans les 98 dizaines; mais ce produit n'est pas nécessairement le plus grand multiple de 12 contenu dans 98; car 98 contient en outre les dizaines de retenue fournies par le carré des unités et par le reste. En divisant 98 par 12, on trouve 8 pour quotient; le chiffre des unités est donc 8 ou un chiffre plus petit. J'essaye 8; pour cela j'écris 8 à la droite de 12, et je multiplie le nom-

bre 128, ainsi formé, par 8; le produit 1024 se compose du produit de 12 dizaines par 8, c'est-à-dire du double produit des dizaines par les unités, et en outre du produit de 8 par 8, c'est-à-dire du carré des unités. Or la somme de ces deux parties doit être contenue dans 987; puisque 1024 est plus grand que 987, on en conclut que le chiffre 8 est trop fort. J'essaye 7 de la même manière, en multipliant 127 par 7; le produit 889 étant contenu dans 987, le chiffre 7 est bon; c'est bien le chiffre des unités de la racine. Ainsi la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 4587 est 67, et il y a un reste 98.

200. Soit encore à extraire la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 458732.

4 5.8 7.3 2	6 7 7	
3 6	1 2 7	1 3 4 7
9 8.7	7	7
8 8 9	8 8 9	9 4 2 9
9 8 3.2		
9 4 2 9		
4 0 3		

On raisonnera comme précédemment: ce nombre étant plus grand que 100, la racine est égale ou supérieure à 10, et par conséquent se compose d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. En vertu du théorème démontré, on obtiendra les dizaines de la racine en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans les 4587 centaines.

Je reprends d'ailleurs la démonstration du théorème, afin d'en bien faire comprendre la généralité. Je désigne par a la racine du plus grand carré contenu dans les centaines du nombre proposé; ce nombre contient a^2 centaines, ou le carré de a dizaines; il ne contient pas $(a+1)^2$ centaines, ou le carré de $a+1$ dizaines. Donc la racine cherchée est ou a dizaines, ou un nombre plus grand que a dizaines, mais plus petit que $a+1$ dizaines. En un mot, a exprime exactement le nombre des dizaines de la racine.

Il s'agit donc d'extraire la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 4587. Ce nombre étant plus grand que 100, la racine est égale ou supérieure à 10, et par conséquent se compose d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. On obtiendra les dizaines de la racine en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans les 45 centaines. En répétant les raisonnements du numéro précédent, on trouve que 67 est la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 4587, et qu'il y a un reste 98. Ainsi la racine du nombre 458732 se compose de 67 dizaines et d'un chiffre des unités que je vais déterminer.

Si du nombre proposé on retranche le carré des 67 dizaines, il reste 98 centaines, qui, ajoutées aux 32 unités, donnent 9832. Ce nombre renferme le double produit des dizaines par les unités; on divisera donc 983 par le double de 67 ou par 134, ce qui donne pour quotient 7. Le chiffre des unités est ou 7 ou un chiffre plus petit. On essayera 7, en écrivant 7 à la droite de 134 et multipliant 1347 par 7; le produit 9429 étant plus petit que 9832, le chiffre 7 est bon. Ainsi la racine cherchée est 677, et il y a un reste 403.

De ce qui précède on conclut:

Règle. *Pour extraire la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant d'ailleurs ne renfermer qu'un chiffre. On extrait la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, ce qui donne le premier chiffre de gauche de la racine cherchée. On retranche ce plus grand carré de la première tranche, et à la droite du reste on abaisse la tranche suivante; on sépare le premier chiffre de droite, et on divise le nombre ainsi formé par le double du chiffre déjà obtenu à la racine; le quotient est le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. On essaye ce chiffre en l'écrivant à la droite du double du premier chiffre, multipliant le nombre ainsi formé par le chiffre que l'on essaye, et retranchant ce produit du nombre obtenu par l'abaissement de la seconde tranche. Si la soustrac-*

tion est possible, le chiffre essayé est bon; si elle n'est pas possible, ce chiffre est trop fort, et alors on essaye le chiffre inférieur d'une unité. Quand on a trouvé le second chiffre de la racine, à la droite du reste on abaisse la tranche suivante, on sépare le premier chiffre de droite, et on divise le nombre ainsi formé par le double de la partie déjà obtenue à la racine. On continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches.

Quand on effectue les soustractions en même temps que les multiplications, on dispose l'opération de cette manière :

4 5.8 7.3 2	6 7 7
9 8.7	1 2 7 1 3 4 7
9 8 3.2	
4 0 3	

J'applique la règle à l'exemple suivant :

5.3 2.3 7.8 1.0 9	2 3 0 7 3
1 3.2	4 3 4 6 0 7 4 6 1 4 3
3 3.7 8.1	
1 5 3 2 0.9	
1 4 7 8 0	

On voit qu'il y a autant de chiffres à la racine qu'il y a de tranches dans le nombre proposé.

Preuve. Si l'on élève au carré la racine trouvée et si l'on ajoute le reste, on doit retrouver le nombre donné.

Remarques.

201. Remarque I. Soit à extraire la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 237.

2.3 7	1 5
1 3.7	2 4
9 6	4
4 1	9 6
2 9	
1 2	

En appliquant la règle précédente, après avoir déterminé le premier chiffre 1 de la racine, on divise 13 par le double des dizaines 2, ce qui donne 6 pour quotient; le chiffre des unités est 6 ou un chiffre plus petit. Je divise ce même nombre 13 par le double des dizaines plus un, c'est-à-dire par 3, je trouve 4 pour quotient; je dis que le chiffre des unités de la racine est 4 ou un chiffre plus grand. En effet, le nombre 137, contenant le produit 30×4, contient à plus forte raison le produit plus petit 24×4; le carré de 14 est donc contenu dans le nombre proposé, et par conséquent la racine cherchée est 14 ou un nombre plus grand. J'essaye 4; pour cela, de 137 je retranche 24×4, il reste 41; le nombre proposé contient le carré de 14 plus 41. On sait que le carré de 15 égale le carré de 14, plus deux fois 14, plus 1, et par conséquent égale le carré de 14 plus 29; le reste 41 étant plus grand que 29, le nombre proposé contient le carré de 15: le chiffre 4 est donc trop faible; j'essaye 5; pour cela, de 41 je retranche 29, il reste 12; le nombre proposé égale le carré de 15, plus 12; ce nouveau reste étant plus petit que deux fois 15, plus 1, le nombre proposé ne contient pas le carré de 16. Le plus grand carré contenu dans le nombre proposé est donc le carré de 15; la racine cherchée est 15, et il reste 12.

Ainsi, *lorsqu'on a trouvé un ou plusieurs chiffres de la racine et qu'à la droite du reste on a abaissé la tranche suivante et séparé le premier chiffre, si l'on divise le nombre ainsi formé par le double de la partie déjà trouvée à la racine, plus un, le quotient est le chiffre suivant de la racine, ou un chiffre trop faible. On essaye ce chiffre en l'écrivant à la droite du double de la première partie, multipliant le nombre ainsi formé par le chiffre que l'on essaye et retranchant ce produit du nombre obtenu par l'abaissement de la seconde tranche. Si le reste est plus petit que le double du nombre obtenu à la racine en prenant le chiffre que l'on essaye, ce double étant augmenté de un, ce chiffre est bon. Si le reste est égal ou supérieur, le chiffre essayé est trop faible, et alors on essaye le chiffre supérieur d'une unité; pour cela, on retranche du reste précédent ce double plus un.*

202. Remarque II. En combinant les deux méthodes, c'est-à-dire en divisant le nombre séparé par le double de la partie obtenue à la racine ou par ce double plus un, on obtient deux quotients qui comprennent entre eux le chiffre cherché. J'applique à un exemple :

2.78.50.24	1668
17.8	25 326 3328
53	
31	
225.0	
29424	
2800	

Le premier chiffre de la racine est 1. En divisant 17 par 2 ou par 3, on trouve les quotients 8 ou 5; le second chiffre est l'un des quatre nombres 5, 6, 7, 8. J'essaye 5; le reste 53 étant plus grand que 31, le chiffre 5 est trop faible. De 53 je retranche 31, le nouveau reste 22 étant plus petit que 33, le chiffre 6 est bon. En divisant 225 par 32 et par 33, on trouve les quotients 7 et 6; le troisième chiffre de la racine est 6 ou 7. J'essaye 6; le reste 294 étant plus petit que 333, le chiffre 6 est bon. En divisant 2942 par 332 et par 333, on trouve le même quotient 8; le quatrième chiffre de la racine est 8 sans ambiguïté.

203. Remarque III. A mesure qu'on avance dans l'opération, l'incertitude se restreint de plus en plus; car, à partir du second chiffre de la racine, ou même à partir du premier, si ce premier est égal ou supérieur à 5, les deux divisions, par lesquelles on détermine chacun des chiffres suivants, donnent le même nombre entier ou deux nombres entiers consécutifs. En effet, dans l'exemple précédent, pour déterminer le troisième chiffre de la racine, on a divisé 225 par 32 ou par 33. Je prends la différence des deux quotients complets :

$$\frac{225}{32}-\frac{225}{33}=\frac{225\times33-225\times32}{32\times33}=\frac{225}{33\times32}=\frac{\frac{225}{33}}{32}.$$

Le second quotient complet $\frac{225}{33}$ est nécessairement plus petit que 10; d'autre part, le dénominateur 32, double d'un nombre de deux chiffres, est plus grand que 10; donc la différence des deux quotients complets est plus petite que l'unité, et par conséquent ces deux quotients sont compris entre deux nombres entiers consécutifs, ou bien ils comprennent entre eux un seul nombre entier. Dans le premier cas, les parties entières des deux quotients sont les mêmes, et l'on a le chiffre de la racine sans ambiguïté; dans le second cas, les parties entières sont deux nombres entiers consécutifs: il y a incertitude entre ces deux nombres seulement; un essai décidera.

Dans le calcul du quatrième chiffre de la racine, la différence des deux quotients complets étant plus petite que $\frac{1}{10}$, il est très-probable que ces deux quotients offriront la même partie entière, et que par conséquent on aura le quatrième chiffre sans ambiguïté.

Lorsque le premier chiffre de la racine est égal ou supérieur à 5, la même propriété se manifeste déjà dans le calcul du second chiffre; car, dans ce cas, la différence des quotients complets est, même pour le second chiffre, plus petite que l'unité.

Ainsi, *quand on calcule une racine carrée, à partir du second chiffre, ou même à partir du premier si ce premier est égal ou supérieur à 5, un seul essai au plus suffit pour déterminer chacun des chiffres suivants.*

Racines carrées incommensurables.

204. Nous avons vu (nº 192) que, lorsqu'un nombre entier, comme 28, n'est pas un nombre carré, il n'existe pas de nombre fractionnaire qui, élevé au carré, reproduise exactement ce nombre. Mais on peut trouver deux nombres fractionnaires qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on veut, et dont les carrés comprennent le nombre donné, c'est-à-dire soient, l'un plus petit, l'autre plus grand que ce nombre.

Je me propose, par exemple, de déterminer deux nombres, qui ne diffèrent entre eux que de $\frac{1}{12}$, et dont les carrés com-

prennent le nombre 28. Pour cela, je mets ce nombre sous la forme

$$28=\frac{28\times 12^2}{12^2}=\frac{4032}{12^2}.$$

En extrayant la racine du plus grand carré contenu dans 4032, on trouve que ce nombre est compris entre les carrés des deux nombres entiers consécutifs 63 et 64. Je compare maintenant les trois fractions

$$\frac{63^2}{12^2},\quad \frac{4032}{12^2},\quad \frac{64^2}{12^2};$$

le dénominateur est le même, le numérateur de la seconde est compris entre les numérateurs des deux autres fractions : donc la première fraction est elle-même comprise entre les deux autres. Ainsi les carrés des deux nombres fractionnaires $\frac{63}{12}$ et $\frac{64}{12}$, qui ne diffèrent entre eux que de $\frac{1}{12}$, comprennent le nombre donné 28.

En général, si l'on met le nombre donné A sous la forme $\frac{A\times n^2}{n^2}$ (n étant un nombre entier quelconque), et si l'on extrait la racine du plus grand carré contenu dans le produit $A\times n^2$, on trouve deux nombres fractionnaires $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$, qui ne diffèrent entre eux que de $\frac{1}{n}$, et dont les carrés comprennent A. Comme le nombre n peut être pris aussi grand qu'on veut, les deux nombres fractionnaires, dont les carrés comprennent le nombre donné, différeront aussi peu qu'on voudra.

Chacun des nombres fractionnaires $\frac{a}{n}$ ou $\frac{a+1}{n}$, qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on veut et dont les carrés comprennent A, est ce que l'on appelle la *racine carrée* de A; on le désigne par le symbole $\sqrt{A}$.

205. Il est aisé de voir que le nombre fractionnaire désigné par $\sqrt{A}$ est un nombre incommensurable, c'est-à-dire

qu'il peut représenter une grandeur incommensurable avec une approximation aussi grande qu'on veut (n° 138).

En effet, si l'on considère les nombres dont les carrés sont inférieurs à A, ceux dont les carrés sont supérieurs à A, et si l'on suppose que ces nombres représentent des grandeurs de même espèce, on a deux séries de grandeurs commensurables, telles que les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde série, et que la différence entre une grandeur de la première série et une de la seconde peut être rendue aussi petite qu'on veut; il existe donc entre les deux séries de grandeurs commensurables une grandeur incommensurable unique et déterminée que l'on peut regarder comme la limite commune des deux séries de grandeurs commensurables. Puisque cette grandeur est comprise entre les deux grandeurs $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$, elle diffère de chacune d'elles d'une quantité plus petite que $\frac{1}{n}$, et par conséquent elle est exprimée par l'un ou l'autre des deux nombres $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{n}$; en un mot, la grandeur incommensurable est représentée par le nombre incommensurable $\sqrt{A}$.

206. On peut prendre le nombre n assez grand, non-seulement pour que les nombres $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$ diffèrent entre eux aussi peu qu'on voudra, mais encore pour que leurs carrés eux-mêmes diffèrent entre eux aussi peu qu'on voudra. En effet ces deux carrés ont pour différence

$$\frac{(a+1)^2-a^2}{n^2}=\frac{2a+1}{n^2}.$$

Le numérateur étant plus petit que $2a+2$, c'est-à-dire que $(a+1)\times 2$; cette différence est moindre que $\frac{(a+1)\times 2}{n^2}$, ou que $\frac{a+1}{n}\times\frac{2}{n}$. Supposons qu'il s'agisse du nombre 28, compris

entre 5 et 6, la quantité $\frac{a+1}{n}$ est au plus égale à 6; par conséquent la différence des carrés est moindre que $6 \times \frac{2}{n}$ ou que $\frac{12}{n}$; on pourra donc prendre n assez grand pour que cette différence soit moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Aussi les carrés des nombres fractionnaires $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$, diffèrent entre eux, et par suite du nombre A qu'ils comprennent, aussi peu qu'on voudra.

Il résulte de là que le carré du nombre fractionnaire variable désigné par $\sqrt{A}$, sans être rigoureusement égal à A, en diffère aussi peu qu'on veut; c'est là une sorte d'égalité par approximation indéfinie qu'on ne distingue pas en mathématiques de l'égalité absolue.

Remarque.

207. Quand on a extrait la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre entier, on connaît deux nombres entiers consécutifs, entre lesquels est comprise la racine du nombre proposé. Il est aisé de voir, à l'inspection du reste, duquel de ces deux nombres elle est le plus rapprochée.

Soit, par exemple, le nombre 28, dont la racine est comprise entre 5 et 6; ce nombre contient le carré de 5, plus le reste 3. Formons le carré de $5 + \frac{1}{2}$; ce carré, d'après ce qui a été dit, comprend trois parties: le carré de 5 ou 25; le double produit de 5 par $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 5; enfin le carré de $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$. Ainsi le carré de $5 + \frac{1}{2}$ surpasse le carré de 5 de $5 + \frac{1}{4}$. En général, quand on ajoute une demi-unité à un nombre, son carré augmente du nombre lui-même plus un quart. Si donc le reste est égal ou inférieur à la partie entière de la racine, la partie fractionnaire sera moindre qu'une demi-unité. C'est ce qui a lieu dans l'exemple actuel: le reste 3 étant inférieur à 5, la racine est plus petite que $5 + \frac{1}{2}$; on prendra 5 par défaut, à moins d'une demi-unité près.

Mais si le reste est plus grand que la partie entière de la racine, la partie fractionnaire sera plus grande qu'une demi-unité. Par exemple, le nombre 32 contient le carré de 5, plus le reste 7; ce reste étant supérieur à 5, la racine est plus grande que $5 + \frac{1}{2}$; elle est comprise entre $5 + \frac{1}{2}$ et 6; on prendra 6 par excès, à moins d'une demi-unité.

Ainsi, dans l'extraction des racines, on aura soin de forcer le dernier chiffre quand le reste sera plus grand que la racine trouvée.

Racine carrée des fractions ordinaires.

208. Si les deux termes de la fraction sont des nombres carrés, on obtient la racine carrée de la fraction en extrayant la racine carrée de ses deux termes. Ainsi la racine carrée de la fraction $\frac{25}{49}$ est $\frac{5}{7}$, puisque le carré de la fraction $\frac{5}{7}$ est égal à $\frac{25}{49}$.

Lorsque les deux termes de la fraction proposée, que l'on peut toujours supposer réduite à sa plus simple expression, ne sont pas des nombres carrés, on a démontré qu'il n'existe pas de fraction qui, élevée au carré, reproduise exactement la fraction proposée. Mais on peut trouver une fraction dont le carré diffère infiniment peu de la fraction donnée.

Lorsque le dénominateur de la fraction est un nombre carré, si l'on extrait la racine du plus grand carré contenu dans le numérateur, on obtient immédiatement deux fractions dont les carrés comprennent la fraction proposée. Soit, par exemple, la fraction $\frac{28}{49}$; le numérateur étant compris entre 5^2 et 6^2, les carrés des deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$ comprennent la fraction proposée $\frac{28}{49}$.

Si le dénominateur de la fraction proposée n'est pas un nombre carré, on le rendra tel en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur. Soit la fraction $\frac{4}{7}$; en multipliant ses deux termes par 7, on la met sous la forme $\frac{28}{49}$, et on est ramené au cas précédent.

209. Je me propose maintenant de déterminer deux frac-

tions qui diffèrent de $\frac{1}{n}$, et dont les carrés comprennent la fraction proposée $\frac{4}{7}$. Afin de fixer les idées, je prends $\frac{1}{12}$ pour différence; je mets la fraction proposée sous la forme

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times12^2}{7\times12^2}=\frac{\frac{4\times12^2}{7}}{12^2}=\frac{\frac{576}{7}}{12^2}=\frac{82+\frac{2}{7}}{12^2}.$$

J'extrais la racine du plus grand carré contenu dans la partie entière 82. Les deux carrés 9^2 et 10^2, entre lesquels est compris le nombre 82, comprennent aussi le nombre fractionnaire $82+\frac{2}{7}$; car, d'une part, 9^2 étant plus petit que 82, est plus petit que $82+\frac{2}{7}$; d'autre part, 10^2 surpassant 82 d'au moins une unité, surpasse encore ce nombre augmenté d'une fraction plus petite que l'unité. Je compare maintenant le quotient $\frac{82+\frac{2}{7}}{12^2}$ aux deux fractions $\frac{9^2}{12^2}$ et $\frac{10^2}{12^2}$; le diviseur est le même, le dividende est compris entre les deux numérateurs; donc le quotient lui-même est compris entre les deux fractions. Ainsi les deux fractions $\frac{9}{12}$ et $\frac{10}{12}$, qui ne diffèrent que de $\frac{1}{12}$, sont telles que leurs carrés comprennent la fraction proposée $\frac{4}{7}$.

Il résulte de ce qui précède que l'*on obtient la racine carrée d'un nombre à moins de* $\frac{1}{n}$ *près, en multipliant ce nombre par* n^2, *extrayant la racine du produit à moins d'une unité près, et divisant le résultat par* n.

On demande, par exemple, $\sqrt{10+\frac{3}{5}}$ à moins de $\frac{1}{12}$ près. En multipliant $10+\frac{3}{5}$ par 12^2, on trouve $1526+\frac{2}{5}$; la racine de 1526 à moins d'une unité près est 39; donc $\sqrt{10+\frac{3}{5}}=\frac{39}{12}$ à moins de $\frac{1}{12}$ près.

Racine carrée des nombres décimaux.

210. Considérons maintenant un nombre décimal tel que 45,8732. Ce nombre décimal est égal à la fraction ordinaire $\frac{458732}{10000}$, dont le dénominateur est le carré de 100; en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans le nombre entier

458732, on trouve 677 ; le numérateur étant compris entre les carrés de 677 et de 678, la fraction proposée est comprise entre les carrés des deux fractions $\frac{677}{100}$ et $\frac{678}{100}$ et sa racine entre ces deux fractions elles-mêmes. Ainsi on dira que chacun des deux nombres 6,77 et 6,78 est la racine approchée de 45,8732 à moins d'un centième près.

Pour que ce raisonnement soit possible, il faut que le dénominateur soit un carré parfait, c'est-à-dire que le nombre proposé renferme un nombre pair de chiffres décimaux. Si le nombre des chiffres décimaux était impair, on le rendrait pair en ajoutant un zéro à sa droite. Si l'on demande, par exemple, la racine de 45,873, on ajoutera un zéro et l'on cherchera la racine du nombre égal 45,8730, ce qui donne encore 6,77 à moins d'un centième.

RÈGLE. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre décimal renfermant un nombre pair de chiffres décimaux, on supprime la virgule et l'on extrait, à moins d'une unité, la racine du nombre entier ainsi obtenu ; puis on sépare par une virgule sur la droite de la racine un nombre de chiffres décimaux moitié du nombre des chiffres décimaux du nombre proposé, et l'on a ainsi la racine avec une erreur moindre qu'une unité du dernier ordre.*

Ce procédé permet d'exprimer en décimales les racines carrées avec une approximation aussi grande qu'on veut.

Exemples.

1° Si l'on demande, par exemple, la racine carrée de 45,873 à un millième près, on ajoutera trois zéros à la droite de ce nombre afin d'avoir six chiffres décimaux, et l'on appliquera la règle précédente au nombre décimal 45,873000, ce qui donne la racine 6,773 approchée par excès à moins d'un millième.

2° On calculera de même la racine carrée du nombre entier 528 à moins d'un millième près en appliquant la règle énoncée

au nombre décimal 528,000000. Mais, dans la pratique, il est inutile d'écrire d'avance les zéros; on opère d'abord sur le nombre entier proposé, ce qui donne la partie entière de la racine; ajoutant deux zéros à droite du reste, on obtient le chiffre des dixièmes; ajoutant deux nouveaux zéros, on obtient le chiffre des centièmes et ainsi de suite.

3° Soit la fraction $\frac{5}{7}$ dont on demande la racine à un centième près. On commencera par convertir en décimales la fraction proposée, et l'on s'arrêtera quand on aura quatre chiffres décimaux; on trouve ainsi que la fraction $\frac{5}{7}$ égale la fraction décimale 0,71428..., ce qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{5}{7}=\frac{7142,8\ldots\ldots}{10000}.$$

On extraira ensuite la racine du numérateur à moins d'une unité près; la racine du plus grand carré contenu dans le nombre entier 7142 étant 84, il est clair que le nombre entier 7142 et par suite le nombre fractionnaire 7142,8..., sont compris entre les carrés des deux nombres entiers consécutifs 84 et 85; donc la fraction proposée elle-même est comprise entre les carrés des deux fractions $\frac{85}{100}$ et $\frac{85}{100}$. Ainsi la racine demandée est 0,84 ou 0,85 à moins d'un centième près.

De même, si l'on veut trouver la racine du nombre fractionnaire $32+\frac{2}{3}$ à un millième près, on convertira la fraction $\frac{2}{3}$ en décimales, et l'on extraira la racine du nombre décimal 32,666666, ce qui donne 5,715.

Remarques.

211. Si l'on calcule $\sqrt{5}$, successivement à moins d'une unité près, à moins de $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{100}$,......, on voit que la grandeur incommensurable représentée par $\sqrt{5}$ est comprise entre les deux séries de grandeurs commensurables

2	3
2,2	2,3
2,23	2,24
2,236	2,237
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .

dont elle est la limite commune. Ces deux séries présentent une particularité remarquable : les grandeurs de la première série vont en croissant, et par conséquent se rapprochent de plus en plus de leur limite; celles de la seconde série vont en décroissant, et se rapprochent aussi de plus en plus de la même limite.

Il n'en est pas toujours ainsi : quand on calcule $\sqrt{A}$ à moins de $\frac{1}{n}$ près, le résultat n'est pas nécessairement d'autant plus approché que n est plus grand. Par exemple, si l'on calcule $\sqrt{5}$ à moins de $\frac{1}{4}$ près, on trouve $\frac{9}{4}$ par excès ; or $\frac{9}{4}=2,25$; ce résultat surpasse la vraie racine d'une quantité plus petite que 0,014. Si l'on calcule $\sqrt{5}$ à moins de $\frac{1}{10}$ près, on trouve 2,2 par défaut ; ce résultat diffère de la vraie racine de 0,036. Donc $\frac{9}{4}$ est plus approché que 2,2.

CHAPITRE II.

CUBES ET RACINES CUBIQUES.

Cubes.

212. La troisième puissance, ou le produit de trois facteurs égaux, s'appelle *cube,* parce que le nombre d'unités de volume contenues dans la figure géométrique nommée cube est égal à la troisième puissance du nombre d'unités de longueur contenues dans le côté de la figure.

Je rappelle en effet la manière dont j'ai démontré dans le système métrique que le décamètre cube renferme mille mètres cubes. Je conçois une caisse de forme cubique dont le côté ait 5 mètres de longueur ; le fond de la caisse, qui est un carré, renferme 5^2 ou 25 mètres carrés ; si sur chacun d'eux on place un mètre cube, on forme ainsi au fond de la caisse une couche qui a un mètre de hauteur, et qui contient 25 mètres cubes ; si l'on forme 5 couches pareilles, la caisse sera remplie ; ainsi la caisse cubique contient 25×5 ou 5^3 mètres cubes.

On obtient le cube d'un nombre en multipliant le carré du nombre par le nombre lui-même. Voici les cubes des dix premiers nombres :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

213. Théorème I. *On élève au cube l'unité suivie d'un certain nombre de zéros en triplant le nombre de zéros.* Par exemple $100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$.

Théorème II. *On élève au cube le produit de plusieurs facteurs en élevant chaque facteur séparément au cube.*

THÉORÈME III. *On élève au cube le produit de plusieurs facteurs affectés d'exposants quelconques, en triplant tous les exposants.*

THÉORÈME IV. *On élève une fraction au cube en élevant chaque terme séparément au cube.*

COROLLAIRE. *Le cube d'une fraction irréductible est une fraction irréductible dont les deux termes sont des nombres cubes.*

Je ferai ici les mêmes remarques que sur les carrés. Le cube d'un nombre entier ou fractionnaire est plus grand que le carré (puisqu'on multiplie le carré par un multiplicateur plus grand que l'unité), et par conséquent plus grand que le nombre lui-même.

Au contraire, le cube d'une fraction proprement dite est plus petit que le carré (puisqu'on multiplie le carré par un multiplicateur plus petit que l'unité), et par conséquent plus petit que la fraction elle-même. Si l'on augmente le nombre que l'on élève au cube, le cube augmente.

214. THÉORÈME V. *Lorsqu'un nombre entier n'est pas un nombre cube, il n'existe pas de nombre fractionnaire qui, élevé au cube, reproduise exactement le nombre donné.*

Car le cube d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, étant une fraction irréductible $\frac{a^3}{b^3}$, ne peut être égal à un nombre entier.

THÉORÈME VI. *Lorsque les deux termes d'une fraction irréductibles ne sont pas des nombres cubes, il n'existe pas de fraction qui, élevée au cube, reproduise la fraction proposée.*

Ces propriétés sont générales et s'étendent évidemment aux puissances quelconques.

215. THÉORÈME VII. *Le cube de la somme de deux nombres renferme quatre parties : 1° le cube du premier nombre,*

2° trois fois le carré du premier nombre multiplié par le second, 3° trois fois le premier multiplié par le carré du second, 4° le cube du second.

Soit la somme $7+5$ à élever au cube; je forme d'abord le carré, que je multiplierai ensuite par $7+5$

$$\begin{array}{l} 7^2+7\times5\times2+5^2 \\ 7+5 \\ \hline 7^3+7^2\times5\times2+7\times5^2 \\ \quad +7^2\times5 \quad +7\times5^2\times2+5^3 \\ \hline 7^3+7^2\times5\times3+7\times5^2\times3+5^3. \end{array}$$

J'ai multiplié chacune des parties du carré, d'abord par 7, puis par 5, et j'ai additionné les résultats.

216. Corollaire I. *La différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs égale trois fois le carré du plus petit nombre, plus trois fois ce nombre, plus* 1. Ainsi :

$$11^3=(10+1)^3=10^3+10^2\times3+10\times3+1=1331.$$

217. Corollaire II. Lorsqu'un nombre renferme plusieurs chiffres, on peut le décomposer en dizaines et en unités; son cube renferme alors quatre parties : 1° Le cube des dizaines; 2° trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités; 3° trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités; 4° le cube des unités. La première partie exprime des mille, la seconde des centaines, la troisième des dizaines, la quatrième des unités.

CHAPITRE III.

DES RACINES CUBIQUES.

On appelle *racine cubique* d'un nombre un nombre qui, élevé au cube, reproduit le nombre proposé. La racine cubique de 343 est 7, puisque le cube de 7 est 343. On désigne la racine cubique par le signe $\sqrt[3]{\ }$; ainsi $\sqrt[3]{343}=7$.

Extraction de la racine cubique des nombres entiers.

218. On donne un nombre entier. Si c'est un nombre cube, on cherche sa racine; si ce n'est pas un nombre cube, on cherche la racine du plus grand cube contenu dans le nombre proposé. L'excès du nombre proposé sur le plus grand cube qu'il renferme s'appelle *reste*.

Je considère d'abord un nombre plus petit que 1000; à l'aide du tableau des cubes des neuf premiers nombres, on voit de suite le résultat. Soit le nombre 642; le plus grand cube contenu dans ce nombre est 512, dont la racine est 8, et l'on a un reste 130.

Je considère maintenant un nombre plus grand que 1000, par exemple 98654.

98.654	46		
64	48	127	126
		7	6
346.54		889	756
		48	48
333.36		5689	5556
		7	6
13.18		39823	33336

Le plus grand cube contenu dans ce nombre étant supérieur ou égal à 1000, la racine cherchée est supérieure ou égale à 10;

elle se compose donc d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. Le nombre proposé renferme le cube de la racine, plus le reste; or le cube de la racine, d'après ce qui a été dit, comprend quatre parties : le cube des dizaines, etc. La première partie, exprimant des mille, ne peut se trouver que dans les 98 mille du nombre proposé. Je vais démontrer ce théorème général, savoir que *la racine du plus grand cube contenu dans les mille d'un nombre exprime les dizaines de la racine de ce nombre.*

Le nombre 98 est compris entre les deux cubes consécutifs 64 et 125, cubes de 4 et de 5. Le nombre proposé 98654 contient donc 64 mille ou le cube de 40; il ne contient pas 125 mille ou le cube de 50; il en résulte que la racine cherchée est 40 ou un nombre plus grand que 40, mais plus petit que 50; en un mot, le chiffre des dizaines de la racine est 4.

On connaît les dizaines de la racine. Si du nombre proposé on retranche le cube des dizaines 64000, le reste 34654 ne renferme plus que les trois autres parties du cube, savoir : trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités, trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités, le cube des unités.

La première partie, exprimant des centaines, est contenue dans les 346 centaines; trois fois le carré des dizaines étant 48, le produit de 48 par le chiffre des unités est contenu dans 346; mais ce produit n'est pas nécessairement le plus grand multiple de 48 contenu dans 346; car 346 contient en outre les centaines de retenue provenant des autres parties. En divisant 346 par 48, on trouve 7 pour quotient; le chiffre des unités est donc ou 7 ou un chiffre plus petit.

J'essaye 7; pour cela je forme les trois autres parties du cube de 47 : en multipliant 48 par 7, on obtient la première partie 33600; en multipliant le triple des dizaines ou 12 par le carré des unités 49, on obtient la seconde partie 5880; enfin la troisième partie, le cube des unités, est 343. La somme 39823 de ces trois parties étant plus grande que 34654, le chiffre 7 est trop fort.

J'essaye 6 de la même manière. La somme des trois parties 33336 étant moindre que 34654, le chiffre 6 est bon. Ainsi la

racine du plus grand cube contenu dans le nombre 98654 est 46, et on a un reste 1318.

Pour essayer le chiffre 7, au lieu de calculer les trois parties séparément, il est plus simple de procéder de la manière suivante : à la droite du triple des dizaines 12, j'écris le chiffre 7, je multiplie le nombre 127 ainsi formé par 7, j'ajoute au produit 889 le triple carré des dizaines, c'est-à-dire 4800, ce qui donne le nombre 5689 que je multiplie par 7, j'obtiens ainsi la somme 39823 des trois autres parties du cube. En effet de cette manière le nombre 7 a été multiplié deux fois successivement par 7, ce qui donne le cube des unités; le triple des dizaines 12 a été aussi multiplié deux fois successivement par 7, ce qui donne trois fois le produit des dizaines par le carré des unités; enfin le triple carré des dizaines 48 a été multiplié par le chiffre des unités 7. Après avoir reconnu que le chiffre 7 est trop fort, on essayera de la même manière le chiffre 6.

219. Soit encore à extraire la racine du plus grand cube contenu dans le nombre 98654965.

```
98.654.965  | 462
64          |---------
----------  | 48 | 6348            126           1382
 346.54                              6              2
 33336                            -----          ------
----------                          756           2764
   1318.965                        48            6348
   1275128                        -----         -------
----------                         5554         637564
     43837                            6              2
                                  -----         -------
                                  33336         1275128
```

On raisonnera comme précédemment : ce nombre étant plus grand que 1000, la racine est égale ou supérieure à 10, et par conséquent se compose d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. En vertu du théorème démontré, on obtiendra les dizaines de la racine en extrayant la racine cubique du plus grand cube contenu dans les 98654 mille.

Ce nombre 98654 étant lui-même plus grand que 1000, sa racine est égale ou supérieure à 10, et par conséquent se com-

pose d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines. On obtiendra les dizaines de la racine en extrayant la racine du plus grand cube contenu dans les 98 mille. En répétant les raisonnements faits précédemment on trouve que 46 est la racine du nombre 98654 et qu'il y a en reste 1318. Ainsi la racine du nombre proposé se compose de 46 dizaines et d'un chiffre des unités que je vais déterminer.

Si du nombre proposé on retranche le cube des dizaines, il reste 1318 mille qui, ajoutés aux 965 unités, donnent 1318965. Ce nombre renferme les trois autres parties du cube; on divisera donc 13189 par trois fois le carré de 46 ou par 6348, ce qui donne pour quotient 2. On essayera le chiffre 2 par le procédé indiqué précédemment. Le chiffre 2 est bon. Ainsi la racine cherchée est 462.

De ce qui précède on conclut :

Règle. *Pour extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre entier donné, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant d'ailleurs ne renfermer que deux chiffres ou un seul. On extrait la racine de la première tranche de gauche, ce qui donne le premier chiffre de gauche de la racine cherchée. On retranche le cube de ce chiffre de la première tranche, et à la droite du reste on abaisse la tranche suivante. On sépare les deux premiers chiffres de droite et on divise le nombre ainsi formé par trois fois le carré du chiffre déjà obtenu à la racine. Le quotient est le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. On essaye ce chiffre en formant les trois autres parties du cube et retranchant la somme du nombre obtenu par l'abaissement de la seconde tranche. Si la soustraction n'est pas possible, le chiffre essayé est trop fort, et on essaye le chiffre inférieur d'une unité; si elle est possible, à la droite du reste on abaisse la tranche suivante. On continue de cette manière jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la dernière tranche.*

Preuve. En élevant la racine trouvée au cube et ajoutant le reste, on doit reproduire le nombre proposé.

Racines cubiques incommensurables.

220. Les considérations que nous avons présentées sur les racines carrées incommensurables s'étendent facilement aux racines cubiques et en général aux racines d'un ordre quelconque. Lorsqu'un nombre entier A n'est pas un cube parfait, il n'existe pas de nombre fractionnaire qui, élevé au cube, reproduise exactement ce nombre; mais on peut trouver deux nombres fractionnaires qui diffèrent aussi peu qu'on voudra, et dont les cubes comprennent le nombre A.

En effet, si l'on met le nombre A sous la forme $\frac{A\times n^3}{n^3}$ et si l'on extrait la racine du plus grand cube contenu dans $A\times n^3$, on obtient deux nombres fractionnaires $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$ qui ne diffèrent que de $\frac{1}{n}$, et dont les cubes comprennent le nombre A.

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{n}$ ou $\frac{a+1}{n}$, qui diffèrent aussi peu qu'on voudra et dont les cubes comprennent A, est ce que l'on appelle la *racine cubique* de A. On les désigne par le symbole $\sqrt[3]{A}$.

On verra comme précédemment que ce nombre fractionnaire représente une grandeur incommensurable, avec une approximation indéfinie. Cette grandeur incommensurable, comprise entre les deux grandeurs commensurables $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$, diffère de chacune d'elles d'une quantité plus petite que $\frac{1}{n}$, et par conséquent est exprimée par l'un ou l'autre des deux nombres $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{n}$; en un mot, la grandeur incommensurable est représentée par le nombre incommensurable $\sqrt[3]{A}$.

Racines cubiques des fractions ordinaires.

221. Si les deux termes de la fraction sont cubes parfaits, on obtient la racine cubique de la fraction en extrayant la racine de ses deux termes. Ainsi $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}=\frac{5}{7}$.

Lorsque les deux termes de la fraction proposée, que l'on peut toujours supposer réduite à sa plus simple expression, ne sont pas des nombres cubes, il n'existe pas de fraction qui, élevée au cube, reproduise exactement la fraction proposée; mais on peut trouver deux fractions qui diffèrent aussi peu qu'on voudra et dont les cubes comprennent la fraction proposée.

Lorsque le dénominateur de la fraction est un cube, si l'on extrait la racine du plus grand cube contenu dans le numérateur, on obtient immédiatement deux fractions dont les cubes comprennent la fraction proposée.

Soit, par exemple la fraction $\frac{150}{343}$; le numérateur étant compris entre 5^3 et 6^3, les cubes des deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$ comprennent la fraction proposée.

Si le dénominateur n'est pas cube parfait, on le rendra tel en multipliant les deux termes de la fraction par le carré du dénominateur. Soit la fraction $\frac{3}{7}$; en multipliant les deux termes par 7^2 ou par 49, on la met sous la forme $\frac{147}{343}$ et l'on est ramené au cas précédent.

Je me propose maintenant de déterminer deux fractions qui diffèrent de $\frac{1}{n}$, et dont les cubes comprennent la fraction proposée $\frac{3}{7}$. Afin de fixer les idées, je prends $\frac{1}{12}$ pour différence; je mets la fraction proposée sous la forme

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times 12^3}{7\times 12^3}=\frac{\frac{3\times 12^3}{7}}{12^3}=\frac{\frac{5184}{7}}{12^3}=\frac{740+\frac{4}{7}}{12^3}.$$

Extrayant la racine du plus grand cube contenu dans la partie entière 740, j'obtiens les deux fractions $\frac{9}{12}$ et $\frac{10}{12}$, dont les cubes comprennent $\frac{3}{7}$.

Il résulte de ce qui précède que l'*on obtient la racine cubi-*

que d'un nombre, avec une approximation marquée par $\frac{1}{n}$, *en multipliant le nombre proposé par* n^3, *extrayant la racine cubique du produit à moins d'une unité, et divisant le résultat par* n.

Racines cubiques des nombres décimaux.

222. Le nombre décimal 98,654965 peut s'écrire sous forme d'une fraction ordinaire $\frac{98654965}{1000000}$, ayant pour dénominateur le cube de 100. J'extrais la racine du plus grand cube contenu dans le numérateur. Le numérateur étant compris entre les cubes de 462 et de 463, le nombre décimal proposé est compris entre les cubes des deux fractions $\frac{462}{100}$ et $\frac{463}{100}$. Ainsi $\sqrt[3]{98,654965} = 4,62$ à moins d'un centième près.

Pour que ce raisonnement soit possible, il faut que le dénominateur soit un cube parfait, c'est-à-dire que le nombre des chiffres décimaux du nombre proposé soit un multiple de 3; s'il ne l'est pas, on le rend tel par l'addition d'un ou deux zéros à la droite. Ainsi :

Règle. *Pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal, qui contient un nombre de chiffres décimaux multiple de 3, on supprime la virgule et l'on extrait à moins d'une unité la racine cubique du nombre entier ainsi obtenu ; puis l'on sépare par une virgule sur la droite de la racine un nombre de chiffres décimaux égal au tiers du nombre des chiffres décimaux que renferme le nombre proposé, et l'on a la racine avec une erreur moindre qu'une unité du dernier ordre.*

Ce procédé permet d'exprimer en décimales les racines cubiques avec une approximation aussi grande que l'on veut.

CHAPITRE IV

CALCUL DES RADICAUX.

Notions sur les nombres incommensurables.

223. Nous avons dit que, lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, par exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans l'unité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, cette grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de l'unité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il arrive souvent que la grandeur et l'unité n'admettent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de grandeur, si petite qu'elle soit, contenue exactement dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas, on dit que la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est impossible de la mesurer exactement, on se borne à une évaluation approximative. Imaginons l'unité partagée en un grand nombre de parties égales, par exemple, en mille parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesurer contient de ces parties; elle en contient, je suppose, 728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la grandeur à mesurer, étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus petite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou par l'autre de ces deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième.

Si l'on avait partagé l'unité en un million de parties égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur avec une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un *nombre incommensurable*.

224. Les racines des quantités qui ne sont pas puissances parfaites, donnent aussi naissance à des nombres incommensurables. Appelons A un nombre entier, non puissance n^e parfaite, et plus généralement une fraction ordinaire irréductible dont les deux termes ne sont pas des puissances n^{es} parfaites ; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ qui, élevé à la n^e puissance, reproduise exactement A. En effet, la n^e puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire les deux nombres a et b premiers entre eux, les deux puissances a^n et b^n seront aussi premières entre elles et la fraction $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fraction irréductible ne peut être égale à un nombre entier A. Elle ne peut non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement ; la fraction proposée aurait ainsi ses deux termes puissances parfaites, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A. Écrivons en effet la quantité proposée A sous la forme

$$\frac{A\times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre entier dont la n^e puissance soit contenue dans $A\times b^n$; la quantité $A\times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$ la quantité $\frac{A\times b^n}{b^n}$

ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A, est ce que l'on appelle la racine approchée de A; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$ représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres dont les n^{es} puissances sont inférieures à A; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A, et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue aussi petite qu'on veut. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables, il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée qui en est la limite commune; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$.

225. On rencontre en géométrie plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi, on démontre que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité : elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité ; mais le nombre incommensurable qui mesure la circonférence ne peut, comme

le précédent, être obtenu par des extractions de racines; on le désigne par la lettre π.

Calcul des nombres incommensurables.

226. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étant autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur très-petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut: donc elles comprennent une grandeur déterminée qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction.

Il en est de même de la soustraction: si l'on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès, ou réciproquement, le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables que représentent les deux nombres incommensurables proposés.

Multiplication.

227. Soit à faire le produit de deux nombres incommensurables, par exemple $\sqrt{7}\times\sqrt{5}$. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second ; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut ; donc ils comprennent une grandeur qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; car le produit des nombres fractionnaires approchés ne change pas. Ce théorème fondamental étendu aux nombres incommensurables, toutes ses conséquences le sont par là même ; ainsi on peut grouper deux facteurs en un seul, décomposer, au contraire, un facteur en deux, etc.

Division.

Si l'on prend le dividende par défaut, le diviseur par excès, ou réciproquement, le dividende par excès, le diviseur par défaut, le premier quotient sera plus petit que le second, et comme leur différence est très-petite, ils comprennent entre eux une grandeur déterminée qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Calcul des radicaux.

228. On appelle en général racine n^e d'un nombre a, un nombre commensurable ou incommensurable qui, élevé à la n^e puissance, reproduise le nombre proposé. On la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée : dans ce cas, on sous-entend l'indice 2.

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous allons poser quelques lemmes sur les puissances :

LEMME I. *On élève un produit à une certaine puissance en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

En effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \ldots\ldots = a^n b^n c^n.$$

LEMME II. *On élève une fraction à une certaine puissance en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

En effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a^n}{b^n}.$$

LEMME III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à l'élever à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants.*

En effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots = a^{mn}.$$

Venons maintenant au calcul des radicaux.

229. THÉORÈME I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice égale la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce qu'on fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité *abc;* donc ce premier membre est la racine n^e de *abc*.

REMARQUE. Le produit de deux nombres incommensurables est en général un nombre incommensurable. Cependant il arrive quelquefois que ce produit est commensurable; ainsi on a

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6;$$

le produit des deux nombres incommensurables $\sqrt{12}$ et $\sqrt{3}$ diffère du nombre 6 aussi peu qu'on veut.

THÉORÈME II. *Le quotient de deux radicaux de même indice égale la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce qu'on fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

230. THÉORÈME III. *On élève un radical à une certaine puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On a en effet, en vertu du théorème I,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\ldots\ldots=\sqrt[n]{a^m}.$$

THÉORÈME IV. *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m, on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n, on obtient a; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn. Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn, reproduit a ; c'est donc la racine mn^e de a.

231. THÉORÈME V. *On ne change pas la valeur d'un radical quand on multiplie ou quand on divise par un même nom-*

bre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m, on obtient un second radical

$$\sqrt[np]{a^{mp}}$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent, le second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Corollaire I. On *simplifie* un radical en divisant l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur. Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5}.$$

Corollaire II. On réduit plusieurs radicaux au *même indice* en prenant pour indice commun le produit des indices, ou simplement leur plus petit multiple. Cette réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou diviser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[12]{a^3 b^2}.$$

232. Théorème VI. *On obtient la racine quatrième de la*

plus grande puissance quatrième contenue dans un nombre entier donné, en extrayant la racine carrée du plus grand carré contenu dans ce nombre, puis la racine carrée du plus grand carré contenu dans cette première racine carrée.

Soit A le nombre entier donné, a la racine du plus grand carré contenu dans A, b la racine du plus grand carré contenu dans a. Puisque b^2 est inférieur ou égal à a, si on l'élève au carré, on a b^4 inférieur ou égal à a^2; et comme a^2 est inférieur ou égal à A, il s'ensuit que b^4 est lui-même inférieur ou égal à A. D'autre part, $(b+1)^2$ surpasse a d'au moins une unité; donc $(b+1)^2$ est supérieur ou égal à $a+1$: si l'on élève au carré, on a $(b+1)^4$ supérieur à A. Ainsi A contient b^4 et ne contient pas $(b+1)^4$; donc b est la racine quatrième de la plus grande quatrième puissance contenue dans A.

Ce théorème est général : *on obtiendrait la racine sixième de la plus grande puissance sixième contenue dans un nombre entier donné, en extrayant la racine carrée du plus grand carré contenu dans ce nombre, puis la racine cubique du plus grand cube contenu dans cette racine carrée.* Il est préférable de commencer par la racine carrée, afin d'opérer sur un nombre plus petit dans l'extraction de la racine cubique.

En général, à l'aide d'une série de racines carrées et de cubiques, on peut extraire une racine dont l'indice ne contient que les facteurs premiers 2 et 3.

LIVRE V

RAPPORTS ET PROGRESSIONS

CHAPITRE I

RAPPORTS.

Définition.

233. On appelle *rapport* de deux grandeurs de même espèce le nombre qui exprime combien de fois la première contient la seconde et combien de parties de la seconde.

En d'autres termes, le rapport de deux grandeurs de même espèce est la mesure de la première quand on prend la seconde pour unité.

Par exemple, si la première grandeur contient trois fois la seconde exactement, le rapport est le nombre entier 3.

Si la première grandeur contient trois fois la cinquième partie de la seconde, le rapport est la fraction $\frac{3}{5}$.

Si la première grandeur contient quatre fois la seconde, plus trois fois la cinquième partie de la seconde, le rapport est le nombre fractionnaire $4+\frac{3}{5}$.

234. Lorsque deux grandeurs ont été mesurées au moyen d'une même unité, le rapport de ces deux grandeurs est égal au quotient des deux nombres qui les mesurent.

Nous pouvons remarquer en effet que le quotient indique

combien de fois le dividende contient le diviseur et combien de parties du diviseur. Supposons d'abord que le quotient soit un nombre entier 3; le diviseur multiplié par 3, ou répété trois fois, donne le dividende; donc le dividende contient trois fois le diviseur, et par conséquent le rapport du dividende au diviseur est le quotient 3.

Supposons maintenant que le quotient soit une fraction $\frac{3}{5}$. Le dividende est toujours égal au produit du diviseur par le quotient. Or, multiplier le diviseur par la fraction $\frac{3}{5}$, c'est répéter trois fois la cinquième partie du diviseur; donc le dividende contient trois fois la cinquième partie du diviseur, et par conséquent le rapport du dividende au diviseur est le quotient $\frac{3}{5}$.

De même, si le quotient est un nombre fractionnaire $4+\frac{3}{5}$, le dividende, qui est égal au produit du diviseur par le quotient, contient quatre fois le diviseur plus trois fois la cinquième partie du diviseur: le rapport est $4+\frac{3}{5}$.

Ainsi, d'une manière générale, le *quotient exprime le rapport de la quantité dividende à la quantité diviseur*. C'est pourquoi l'on a adopté le signe de la division, le trait horizontal, pour indiquer le rapport de deux quantités. On écrit au-dessus la première quantité, ou le *numérateur*, au-dessous la seconde quantité, ou le *dénominateur*. Par exemple, le rapport du nombre 5 au nombre 7 s'écrira $\frac{5}{7}$; le rapport de $\frac{4}{7}$ à $\frac{3}{5}$ s'écrira $\frac{\left(\frac{4}{7}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)}$; le rapport de $5+\frac{3}{4}$ à $2+\frac{1}{6}$ s'écrira $\frac{5+\frac{3}{4}}{2+\frac{1}{6}}$.

Le rapport de deux nombres fractionnaires peut toujours être ramené à celui de deux nombres entiers. Soit le rapport de $5+\frac{3}{4}$ à $2+\frac{1}{6}$, ou de $\frac{23}{4}$ à $\frac{13}{6}$; si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, on a le rapport de 69 *douzièmes* à 26 *douzièmes*; mais ce rapport est évidemment égal à celui des nombres entiers 69 et 26. De cette manière, le rapport proposé $\frac{5+\frac{3}{4}}{2+\frac{1}{6}}$ se met sous la forme d'une fraction ordinaire $\frac{69}{26}$.

Une fraction ordinaire exprime le rapport de deux nombres

entiers, le rapport de son numérateur à son dénominateur. Il est aisé de voir que les propriétés fondamentales des fractions ordinaires s'étendent aux rapports en général.

Propriétés des rapports.

235. Théorème I. ***La valeur d'un rapport ne change pas quand on multiplie ou quand on divise les deux termes du rapport par un même nombre.***

Désignons par q la valeur du rapport $\frac{a}{b}$. Puisque la dividende a est égal au produit du diviseur b par le quotient q, on a

$$a = b \times q.$$

Si l'on multiplie par le même nombre c ces deux nombres égaux, on obtient deux produits égaux

$$a \times c = b \times q \times c = b \times c \times q.$$

On en déduit

$$\frac{a \times c}{b \times c} = q,$$

et, par suite,

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi la valeur du rapport ne change pas quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.

Réciproquement, quand on divise par un même nombre c les deux termes d'un rapport $\frac{a}{b}$, on obtient un rapport égal

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}};$$

car si l'on multiplie par c les deux termes de ce dernier rap-

port, ce qui ne change pas sa valeur, on reproduit le rapport proposé $\frac{a}{b}$.

236. Théorème II. *On effectue le produit de deux rapports en les multipliant terme à terme.*

Soient les deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, dont nous désignerons les valeurs par q et q'; on a

$$a = b \times q,$$
$$a' = b' \times q'.$$

Si l'on multiplie respectivement l'une par l'autre ces quantités égales, on a les produits égaux

$$a \times a' = b \times q \times b' \times q' = b \times b' \times q \times q';$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = q \times q'.$$

Ainsi

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}.$$

Corollaire. On appelle rapports *inverses* deux rapports formés des mêmes termes, mais disposés en ordre inverse. Ainsi les deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, sont inveres l'un de l'autre. Le produit de deux rapports iuverses est égal à l'unité; car on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1.$$

237. Théorème III. *On divise un rapport par un autre en multipliant le rapport dividende par le rapport diviseur renversé.*

Soit à diviser le rapport $\frac{a}{b}$ par le rapport $\frac{c}{d}$. Je dis que

l'on a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

En effet, si l'on multiplie le quotient $\frac{a\times d}{b\times c}$ par le diviseur $\frac{c}{d}$, on obtient $\frac{a\times d\times c}{b\times c\times d}$, c'est-à-dire le dividende $\frac{a}{b}$.

238. THÉORÈME IV. *On élève un rapport à une certaine puissance en élevant chaque terme à cette puissance.*

Proposons-nous d'élever au carré le rapport $\frac{a}{b}$; on a, d'après le théorème II,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a}{b\times b}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

On a de même

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)^2\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3};$$

et ainsi de suite.

239. THÉORÈME. V. Réciproquement, *on extrait la racin d'un rapport en extrayant la racine de chaque terme.*

On a

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Car on élève au carré le second rapport en élevant chaque terme au carré, ce qui donne $\frac{a}{b}$.

Il en est de même pour une racine d'ordre quelconque.

Proportions.

240. Deux rapports égaux constituent une *proportion.* Ainsi les deux rapports égaux $\frac{18}{12}$ et $\frac{24}{16}$ constituent la proportion

$$\frac{18}{12}=\frac{24}{16},$$

que l'on écrivait autrefois

$$18 : 12 :: 24 : 16.$$

Les deux termes 18 et 16, placés aux extrémités, s'appellent les *extrêmes;* les deux autres, 12 et 24, placés au milieu, s'appellent *moyens.*

241. Théorème VI. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes égale le produit des moyens.*

Suivent les deux rapports égaux ou la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Si l'on multiplie par d les deux termes du premier rapport, par b les deux termes du second, ce qui ne change pas la valeur des rapports, on a les deux rapports égaux

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{d\times b}.$$

Ces deux rapports égaux, ayant même dénominateur, ont leurs numérateurs égaux; on a donc

$$a\times d=b\times c.$$

Ainsi le produit des extrêmes a et d est égal au produit des moyens b et c.

Par exemple, dans la proportion

$$\frac{18}{12}=\frac{24}{16},$$

on a

$$18\times 16=24\times 12=288.$$

242. THÉORÈME VI. Réciproquement, *lorsque quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux égale le produit des deux autres, ces quatre nombres forment une proportion.*

Soient quatre nombres a, b, c, d, tels que l'on ait

$$a\times d=b\times c.$$

Si l'on divise ces deux produits égaux par le même nombre $b\times d$, on obtient les quotients égaux

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d},$$

En simplifiant, on a les deux rapports égaux ou la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Par exemple, les quatre nombres 18, 12, 24, 16, donnant les produits égaux

$$18\times 16=12\times 24=288,$$

forment la proportion

$$\frac{18}{12}=\frac{24}{16}.$$

243. COROLLAIRE I. *Quand on connaît trois termes d'une proportion, il est facile de trouver le quatrième ; si le terme inconnu est un extrême, on fait le produit des moyens et on divise par l'extrême connu ; si le terme inconnu est un moyen, on fait le produit des extrêmes et on divise par le moyen connu.*

Soient 18, 12, 24 les trois premiers termes d'une proportion. Si l'on représente par x le quatrième terme inconnu, on doit avoir la proportion

$$\frac{18}{12}=\frac{24}{x}.$$

Puisque le produit des extrêmes égale le produit des moyens, il en résulte

$$18 \times x = 24 \times 12;$$

d'où l'on déduit en divisant par 18,

$$x = \frac{24 \times 12}{18} = 16.$$

244. Corollaire II. On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux nombres donnés un nombre qui occupe les deux places moyennes dans une proportion dont les deux nombres donnés sont les extrêmes. Si l'on désigne par x la moyenne proportionnelle entre les deux nombres donnés 18 et 8, on a la proportion

$$\frac{18}{x} = \frac{x}{8}.$$

Le produit des moyens $x \times x$ ou x^2 égale le produit des extrêmes 18×8; donc

$$x = \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{144} = 12.$$

Ainsi *la moyenne proportionnelle entre deux nombres donnés égale la racine carrée du produit de ces deux nombres.*

245. Théorème VII. *Etant donnés quatre nombres en proportion, on peut les disposer de huit manières différentes.*

Soit la proportion

$$\frac{12}{4} = \frac{15}{5}.$$

Si l'on change l'ordre des termes de manière que le produit des extrêmes reste toujours égal au produit des moyens, il est évident que la proportion subsiste. Je change d'abord les moyens de place,

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5};$$

puis les extrêmes,

$$\frac{5}{4}=\frac{15}{12};$$

puis à la fois les moyens et les extrêmes,

$$\frac{5}{15}=\frac{4}{12}.$$

Si maintenant on permute les deux membres de chacune des égalités précédentes, on obtient quatre nouvelles proportions

$$\frac{15}{5}=\frac{12}{4},$$

$$\frac{4}{5}=\frac{12}{15},$$

$$\frac{15}{12}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{4}{12}=\frac{5}{15}.$$

246. Théorème VIII. *Dans une suite de rapports égaux, la somme des numérateurs et celle des dénominateurs forment un rapport égal aux premiers.*

Soient les trois rapports égaux

$$\frac{9}{15}, \quad \frac{12}{20}, \quad \frac{21}{35}:$$

Je dis que la somme des numérateurs et celle des dénominateurs forment un nouveau rapport

$$\frac{9+12+21}{15+20+35},$$

égal à chacun des rapports proposés. En effet, chacun des rapports proposés est égal à la fraction $\frac{3}{5}$, ce qui signifie que le numérateur 9 du premier rapport est égal aux trois cinquièmes de son dénominateur 15; que de même le numérateur 12 du second rapport est égal aux trois cinquièmes de son dénomina-

teur 20, et que le numérateur 21 du troisième rapport est égal aux trois cinquièmes de son dénominateur 35.

Or, imaginons que l'on veuille prendre les trois cinquièmes de la somme

$$15+20+35$$

des trois dénominateurs; il est clair que l'on obtient les trois cinquièmes de la somme de plusieurs quantités en prenant les trois cinquièmes de chacune d'elles; mais les trois cinquièmes de chaque dénominateur, c'est le numérateur correspondant; on aura donc la somme des numérateurs

$$9+12+21.$$

Ainsi la somme des numérateurs $9+12+21$ est égale aux trois cinquièmes de la somme des dénominateurs $15+20+35$; donc le rapport

$$\frac{9+12+21}{15+20+35}, \quad \text{ou} \quad \frac{42}{70},$$

est égal à la fraction $\frac{3}{5}$, comme chacun des rapports proposés.

247. COROLLAIRE I. *Dans une suite de rapports égaux, si, après avoir multiplié les deux termes de chaque rapport par un même nombre, on fait la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs, on obtient un nouveau rapport égal à chacun des rapports proposés.*

Soient les trois rapports égaux

$$\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{21}{35}.$$

On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant ses deux termes par un même nombre. Si l'on multiplie par 3 les deux termes du premier rapport, par 5 ceux du second et par 2 ceux du troisième, on a encore des rapports égaux

$$\frac{9\times3}{15\times3}=\frac{12\times5}{20\times5}=\frac{21\times2}{35\times2}.$$

Si maintenant on fait la somme des numérateurs et celle des dénominateurs, on obtient un nouveau rapport

$$\frac{9\times3+12\times5+21\times2}{15\times3+20\times5+35\times2},$$

égal à chacun des derniers rapports, et par conséquent à chacun des rapports proposés.

248. Corollaire II. *Dans une suite de rapports égaux, la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs et la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs forment un rapport égal à chacun des rapports proposés.*

En effet, les carrés des rapports égaux

$$\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{21}{35}$$

sont des rapports égaux

$$\frac{9^2}{15^2}=\frac{12^2}{20^2}=\frac{21^2}{35^2}.$$

Si l'on applique le théorème à ces derniers rapports, on forme un rapport

$$\frac{9^2+12^2+21^2}{15^2+20^2+35^2}$$

égal à chacun d'eux; en extrayant la racine carrée, on a un rapport

$$\frac{\sqrt{9^2+12^2+21^2}}{\sqrt{15^2+20^2+35^2}}$$

égal à chacun des rapports proposés.

CHAPITRE II

PROBLÈMES.

---

249. Dans la plupart des questions de mathématiques, on a à considérer deux quantités qui dépendent l'une de l'autre. Si, quand l'une devient un certain nombre de fois plus grande, l'autre devient le même nombre de fois plus grande, on dit que ces deux quantités varient *dans le même rapport* ou sont *proportionnelles.*

Par exemple, le prix d'une certaine quantité de blé dépend de la quantité que l'on achète. Si l'on achète une quantité deux fois plus grande, la somme à payer deviendra deux fois plus grande. Si l'on achète une quantité trois fois plus grande, la somme à payer deviendra trois fois plus grande. En général, la quantité de blé et la valeur varient dans le même rapport, ce qu'on exprime en disant que la valeur est proportionnelle à la quantité.

Considérons une locomotive en mouvement uniforme, c'est-à-dire parcourant le même espace dans le même temps; dans ce cas, on appelle vitesse le nombre de mètres parcourus en une seconde. L'espace parcouru par la locomotive dépend évidemment du temps que l'on considère; dans un temps deux fois plus grand, elle parcourra un espace deux fois plus grand; dans un temps trois fois plus grand, un espace trois fois plus grand; l'espace parcouru et le temps varient donc dans le même rapport; en d'autres termes, l'espace parcouru est proportionnel au temps.

250. Quelquefois, quand l'une des quantités devient un

certain nombre de fois plus grande, l'autre devient le même nombre de fois plus petite. Dans ce cas, on dit que les deux quantités varient ***dans un rapport inverse*** ou sont ***inversement proportionnelles***.

Par exemple, la quantité de blé que l'on peut acheter avec une somme déterminée dépend du prix de la mesure de blé. Si la mesure coûte deux fois plus, avec la même somme d'argent on ne pourra acheter qu'une quantité deux fois plus petite. Si la mesure coûte trois fois plus, on ne pourra acheter qu'une quantité trois fois plus petite. Ainsi, la quantité de blé que l'on peut acheter avec une même somme d'argent et le prix de la mesure varient dans un rapport inverse.

Considérons le temps employé par une locomotive marchant uniformément pour aller d'une station à une autre. Ce temps dépend de la vitesse de la locomotive : si la locomotive marche avec une vitesse deux fois plus grande, elle mettra, pour parcourir la même distance, un temps deux fois plus petit; si elle marche avec une vitesse trois fois plus grande, elle mettra un temps trois fois plus petit. Ainsi, le temps que met la locomotive à parcourir une certaine distance et la vitesse varient dans un rapport inverse.

251. Souvent une quantité dépend à la fois de plusieurs autres. Par exemple, le poids d'une plaque de fer, d'une certaine épaisseur, dépend de la longueur et de la largeur de la plaque. Si la longueur devient deux fois plus grande, la largeur restant la même, le poids devient deux fois plus grand. De même, si la largeur devient deux fois plus grande, la longueur restant la même, le poids devient aussi deux fois plus grand. Ainsi le poids varie dans le même rapport que la longueur et la largeur. Le poids de la plaque dépend aussi de son épaisseur : quand l'épaisseur est deux fois plus grande, la longueur et la largeur restant les mêmes, le poids devient deux fois plus grand. On dira donc que le poids d'une plaque de fer est proportionnel à sa longueur, à sa largeur et à son épaisseur.

La longueur que l'on peut recouvrir sur une route dépend

de la quantité de pierres dont on dispose et de l'épaisseur de la couche que l'on veut former. Avec une quantité de pierres double, l'épaisseur restant la même, on peut recouvrir une longueur double. Mais si l'on donne à la couche une épaisseur deux fois plus grande, la même quantité de pierres ne pourra recouvrir qu'une longueur moitié moindre. Ainsi, la longueur recouverte varie dans le même rapport que la quantité de pierres et dans le rapport inverse de l'épaisseur de la couche.

Nous avons déjà résolu (livre III, chap. VI) par une méthode très-simple, dite de *réduction à l'unité*, un grand nombre de questions dans lesquelles il entre des quantités qui sont dans le même rapport ou dans un rapport inverse. Nous allons reprendre quelques exemples; les remarques que nous ferons sur ces exemples nous conduiront à une règle générale pour toutes les questions de cette espèce.

PROBLÈME I. 6 hectolitres de blé ont coûté 150 francs. Combien coûteront 10 hectolitres?

Nous avons dit : puisque 6 *hectolitres coûtent* 150 *francs, un hectolitre coûte six fois moins, soit* $\frac{150}{6}$ *ou* 25 *francs;* 10 *hectolitres coûteront dix fois plus, soit* 25×10 *ou* 250 *francs, et nous avons écrit le raisonnement de la manière suivante :*

6 *hectolitres coûtent. .* 150 *fr.*

1 *Id.* . . . . $\frac{150}{6}$

10 *Id.* . . . . $\frac{150\times10}{6}=250$ *fr.*

Dans cette question, on a à considérer la quantité de blé et le prix. Le prix varie dans le même rapport que la quantité. On connaît le prix de 6 *hectolitres et on demande celui de* 10 *hectolitres. Nous remarquons que pour trouver le prix de la seconde quantité, il suffit de multiplier le prix de la première quantité,* 150 *francs, par le rapport* $\frac{10}{6}$ *de la seconde quantité à la première.*

PROBLÈME II. Une locomotive, marchant uniformément, par-

court 3000 mètres en 5 minutes. Quelle distance parcourt-elle en 7 minutes?

Nous avons dit : En 5 minutes la locomotive parcourt 3000 *mètres ; en* 1 *minute, elle parcourt une distance cinq fois plus petite, soit* $\frac{3000}{5}$ *ou* 600 *mètres. En* 7 *minutes, elle parcourt une distance sept fois plus grande que la distance parcourue en une minute, soit* 600×7 *ou* 4200 *mètres, et nous avons écrit*

En 5 *minutes, la distance parcourue est* 3000 *mètres,*

En 1. . . . . $\frac{3000}{5}$,

En 7. . . . . $\frac{3000 \times 7}{5} = 4200^m$.

Dans cette seconde question, on a à considérer deux sortes de quantités, le temps et le chemin parcouru. La distance parcourue et le temps varient dans le même rapport. Nous remarquons que l'on obtient la distance cherchée en multipliant la distance connue 3000 *mètres par le rapport* $\frac{7}{5}$ *du second temps au premier.*

Problème III. Avec une certaine somme d'argent, on a acheté 1200 hectolitres de blé, le prix de l'hectolitre étant à 9 francs. Quelle quantité de blé pourra-t-on acheter avec la même somme, le prix de l'hectolitre s'étant élevé à 11 francs?

Quand l'hectolitre coûte 9 *francs, on a acheté* 1200 *hectolitres de blé pour une certaine somme d'argent. Si l'hectolitre ne coûtait que* 1 *franc, on aurait une quantité de blé neuf fois plus grande pour la même somme, soit* 1200×9 *h. Mais l'hectolitre coûtant* 11 *francs, on en aura une quantité onze fois plus petite, soit* $\frac{1200 \times 9}{11} = 981{,}8^h$, *à un dixième près.*

Dans cette question, on a à considérer deux sortes de quantités : le prix de l'hectolitre, et la quantité de blé que l'on peut acheter avec une même somme d'argent. La quantité et le prix de l'hectolitre varient dans un rapport inverse. Nous remarquons que l'on obtient la quantité de blé cherchée en multipliant la quantité connue 1200 h. *par le rapport* $\frac{9}{11}$ *de l'ancien prix au nouveau.*

Problème IV. Une locomotive qui se meut uniformément

avec une vitesse de 10 mètres par seconde a mis 20 minutes pour aller d'une ville à une autre. Quel temps mettra-t-elle à parcourir la même distance si elle marche avec une vitesse de 13 mètres par seconde?

La locomotive, marchant avec une vitesse de 10 mètres par seconde, a mis 20 minutes pour aller d'une ville à l'autre. Si elle marchait avec une vitesse de 1 mètre par seconde, elle mettrait un temps dix fois plus grand, soit 20×10 minutes. Marchant avec une vitesse de 13 mètres, elle mettra un temps 13 fois plus petit, soit $\frac{20\times10}{13}$ *minutes, ou 15,23 minutes.*

Dans cette question, on a à considérer la vitesse de la locomotive et le temps qu'elle met à parcourir une même distance. Ces deux quantités varient dans un rapport inverse. On obtient le temps cherché en multipliant le temps connu, 20 minutes, par le rapport $\frac{10}{13}$ *de l'ancienne vitesse à la nouvelle.*

252. Ce qui précède nous permet de formuler une règle générale pour résoudre immédiatement toutes les questions dans lesquelles on n'a à considérer que des quantités qui varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse. La question peut être posée en ces termes : Une quantité dépend d'une autre; on connaît la valeur de la première, qui correspond à une certaine valeur de la seconde; celle-ci change et prend une autre valeur. Que devient la première quantité?

Il y a deux cas à distinguer : si les deux quantités varient dans le même rapport, on multiplie la valeur connue de la première quantité par le rapport des deux valeurs de la seconde, rapport de la nouvelle valeur à l'ancienne, et l'on aura ainsi la nouvelle valeur de la première quantité. Si les deux quantités varient dans un rapport inverse, on multipliera encore la valeur connue de la première quantité par le rapport des deux valeurs de la seconde, mais on prendra le rapport en ordre inverse, c'est-à-dire de l'ancienne valeur à la nouvelle.

Ainsi, dans le problème II, l'espace parcouru par la locomotive et le temps varient dans le même rapport; pour avoir le nouvel espace, on a multiplié l'espace connu 3000^{m} par le rapport $\frac{7}{5}$ des temps, rapport du nouveau 7 à l'ancien 5.

Dans le problème IV, le temps mis par une locomotive à parcourir une certaine distance et la vitesse varient dans un rapport inverse. Pour avoir le temps cherché, on a multiplié le temps connu, 20 minutes, par le rapport $\frac{10}{13}$ de l'ancienne vitesse 10 à la nouvelle 13.

Nous allons appliquer cette règle à des exemples plus compliqués.

Problème V. Une plaque de fer de $1^m,20$ de longueur sur $0^m,43$ de largeur, pèse 100 kilogrammes. Combien pèsera une plaque de fer de même épaisseur, mais ayant $1^m,70$ de longueur sur $0^m,65$ de largeur?

Le poids de la plaque dépend à la fois de sa longueur et de sa largeur. Faisons d'abord varier sa longueur et cherchons ce que pèse une plaque de $1^m,70$ *de longueur sur* $0^m,43$ *de largeur. La largeur restant la même, le poids varie dans le même rapport que la longueur. Il faudra donc multiplier le poids connu* 100 *k., par le rapport* $\frac{1,70}{1,20}$ *de la nouvelle longueur à l'ancienne, ce qui donne*

$$100 \times \frac{1,70}{1,20}.$$

Faisons maintenant varier sa longueur et cherchons ce que pèse une plaque de $1^m,70$ *de longueur sur* $0^m,65$ *de largeur. La longueur restant la même, le poids varie dans le même rapport que la largeur; il faudra donc multiplier le poids précédent par le rapport* $\frac{0,65}{0,43}$ *de la nouvelle largeur à l'ancienne, ce qui donne pour le poids cherché*

$$100 \times \frac{1,70}{1,20} \times \frac{0,65}{0,43} = 214^k,15.$$

Problème VI. Une plaque de fer de $1^m,20$ de longueur sur $0^m,43$ de largeur et $0^m,025$ d'épaisseur, pèse 100 kilogrammes. Combien pèsera une plaque de fer de $1^m,70$ de longueur, sur $0^m,65$ de largeur et 0,018 d'épaisseur?

Le poids de la plaque dépend de la longueur, de la largeur et de l'épaisseur, et il varie dans le même rapport que chacune de ces trois quantités. Il faudra donc multiplier le poids connu par le rapport des longueurs, par celui des largeurs et par celui des épaisseurs, en prenant chaque rapport dans

l'ordre direct, c'est-à-dire de la nouvelle valeur à l'ancienne. On aura ainsi pour le poids cherché,

$$100 \times \frac{1,70}{1,20} \times \frac{0,65}{0,43} \times \frac{0,018}{0,025} = 154^{k},19.$$

Problème VII. Avec 150 mètres cubes de pierres, on a recouvert sur une route une longueur de 240 mètres, en donnant à la couche de pierres une épaisseur de $0^{m},15$. Quelle longueur pourra-t-on recouvrir avec 300 mètres cubes de pierres, mais en donnant à la couche une épaisseur de $0^{m},20$?

La longueur que l'on peut recouvrir varie dans le même rapport que la quantité de pierres, mais dans un rapport inverse avec l'épaisseur de la couche. Il faudra donc multiplier la longueur connue 240 mètres, par le rapport de la nouvelle quantité de pierres à l'ancienne, et par le rapport de l'ancienne épaisseur à la nouvelle. On trouve ainsi pour la longueur cherchée

$$240 \times \frac{300}{150} \times \frac{0,15}{0,20} = 360 \text{ mètres.}$$

253. Il faut examiner avec beaucoup de soin si les quantités de différentes sortes qui entrent dans la question varient bien dans le même rapport ou en rapport inverse. Soit, par exemple, la question suivante : Une pierre en tombant pendant trois secondes parcourt 44 mètres. Quel espace parcourra-t-elle en tombant pendant 5 secondes? L'expérience démontre que, dans la chute des corps, l'espace parcouru en 2 secondes est 4 fois plus grand que l'espace parcouru dans la première seconde; que l'espace parcouru en trois secondes est 9 fois plus grand; en un mot, que l'espace parcouru ne varie pas comme le temps, mais comme le carré du temps. Pour résoudre la question proposée, on multipliera donc l'espace donné, 44 mètres, non par le rapport $\frac{5}{3}$ des temps, mais par le carré de ce rapport, ce qui fait $44 \times \frac{25}{9} = 122$ mètres.

Proposons-nous encore la question suivante : Le soleil, 3 heures après son lever, est à 20 degrés au-dessus de l'horizon. A quelle hauteur sera-t-il 5 heures après son lever? La hauteur du soleil au-dessus de l'horizon ne croît pas dans le rapport du temps, puisqu'après s'être élevé jusqu'à midi il

s'abaisse ensuite du côté de l'ouest. Le calcul est beaucoup plus compliqué.

Les questions d'intérêt se rapportent aux quantités proportionnelles; car, d'une part, le revenu est proportionnel au capital; d'autre part, lorsqu'on prend l'intérêt simple, le revenu est proportionnel à la durée du placement.

Partage en parties proportionnelles.

254. On dit que des nombres sont *proportionnels* à d'autres nombres, lorsque le rapport d'un nombre quelconque de la première série au nombre correspondant de la seconde série est constant. Ainsi les trois nombres 20, 30, 50 sont proportionnels aux trois nombres 2, 3, 5, puisque le rapport de 20 à 2 est le même que celui de 30 à 3 et que celui de 50 à 5, ce qu'on écrit

$$\frac{20}{2}=\frac{30}{3}=\frac{50}{4}.$$

Le rapport est 10.

PROBLÈME VIII. Partager 100 francs en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3, 5.

Si l'on appelle $x, x' x''$ les trois parties, on a les rapports égaux

$$\frac{x}{2}=\frac{x'}{3}=\frac{x''}{5}.$$

La somme des numérateurs, c'est-à-dire la somme des parts est égale à la quantité à partager, 100 francs; la somme des dénominateurs 2+3+5 égale 10; mais le rapport ainsi formé est égal à chacun des rapports proposés. On a donc

$$\frac{x}{2}=\frac{x'}{3}=\frac{x''}{5}=\frac{100}{10}=10;$$

d'où l'on déduit

$$x = 10 \times 2 = 20,$$
$$x' = 10 \times 3 = 30,$$
$$x'' = 10 \times 5 = 50.$$

Comme vérification, on s'assurera que la somme des parts, $20+30+50$ est bien égale à 100.

Problème IX. **Partager 1600 francs entre 12 hommes, 15 femmes et 20 enfants, de manière que la part de chaque femme soit les $\frac{3}{5}$ de celle de chaque homme, et la part d'un enfant la moitié de celle d'une femme.**

La part d'une femme étant les $\frac{3}{5}$ de celle d'un homme et celle d'un enfant, la moitié de celle d'une femme, c'est-à-dire les $\frac{3}{10}$ de celle d'un homme ; ces trois parts sont respectivement proportionnelles aux nombres fractionnaires

$$1, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{10},$$

ou aux nombres entiers 10, 6, 3, que l'on obtient en multipliant les précédents par 10.

Si donc on appelle x la part d'un homme, x' celle d'une femme, x'' celle d'un enfant, on a les rapports égaux

$$\frac{x}{10} = \frac{x'}{6} = \frac{x''}{3}$$

Multipliant maintenant les deux termes du premier rapport par 12, les deux termes du second par 15, les deux termes du troisième par 20 ; ajoutant, d'une part les numérateurs, d'autre part les dénominateurs, nous formons un rapport

$$\frac{x \times 12 + x' \times 15 + x'' \times 20}{10 \times 12 + 6 \times 15 + 3 \times 20}$$

égal à chacun des proposés. Or le numérateur de ce dernier rapport est la somme à partager 1600 francs, le dénominateur égale 220 ; on a donc finalement

$$\frac{x}{10} = \frac{x'}{6} = \frac{x''}{3} = \frac{1600}{270} = 5,9259\,;$$

d'où l'on déduit

$$x=59,259,\ x'=35,555,\ x''=17,778.$$

PROBLÈME X. Trouver trois nombres proportionnels aux nombres 3, 5, 7, et tels que la somme de leurs carrés soit égale à 332.

En désignant ces trois nombres par x, x' x'', on a

$$\frac{x}{3}=\frac{x'}{5}=\frac{x''}{7}=\frac{\sqrt{x^2+x'^2+x''^2}}{\sqrt{3^2+5^2+7^2}}=\frac{\sqrt{332}}{\sqrt{83}}=2;$$

d'où

$$x=6,\quad x'=10,\quad x''=14.$$

CHAPITRE III.

DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

---

255. Définition. On appelle *progression arithmétique* une suite de nombres tels que la *différence* entre deux nombres consécutifs est constante. Cette différence se nomme *raison* de la progression.

La progression est *croissante*, lorsque les nombres qui la composent vont en croissant. Dans ce cas, chaque terme est égal au précédent augmenté de la raison.

Au contraire, la progression est *décroissante*, lorsque les nombres qui la composent vont en décroissant. Dans ce cas, chaque terme est égal au précédent diminué de la raison.

Voici deux progressions arithmétiques

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20,$$
$$\div 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2,$$

l'une croissante, l'autre décroissante, dont la raison est 3.

256. Théorème I. *Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque égale le premier terme augmenté ou diminué de la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui.*

Soit d'abord une progression arithmétique croissante

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20.$$

Le second terme égale le premier plus la raison,

$$5 = 2 + 3.$$

Le troisième terme égale le second plus la raison, et par conséquent le premier plus deux fois la raison,

$$8=5+3=2+3+3=2+3\times2.$$

Le quatrième terme égale le troisième plus la raison, et par conséquent le premier plus trois fois la raison,

$$11=8+3=2+3+3+3=2+3\times3,$$

et ainsi de suite.

Soit maintenant une progression arithmétique décroissante

$$\div\ 20\ .\ 17\ .\ 14\ .\ 11\ .\ 8\ .\ 5\ .\ 2.$$

Le second terme 17 égale le premier 20 moins la raison 3,

$$17=20-3.$$

Le troisième terme 14 égale le second moins la raison, c'est-à-dire le premier moins deux fois la raison

$$14=17-3=20-3-3=20-3\times2.$$

Le quatrième terme 11 égale le troisième moins la raison, c'est-à-dire le premier moins trois fois la raison,

$$11=14-3=20-3-3-3=20-3\times3,$$

et ainsi de suite.

257. Insérer entre deux nombres donnés un certain nombre de moyens arithmétiques. On appelle moyens arithmétiques, insérés entre deux nombres donnés, des nombres qui forment une progression arithmétique dont les deux nombres donnés soient les deux extrêmes. La question revient évidemment à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer cinq moyens arithmétiques entre les deux nombres 2 et 20. On sait que le dernier terme de la progression 20 égale le premier 2, plus la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui; or le nombre des termes qui précèdent le dernier terme, c'est le nombre des moyens à insérer plus un; donc le dernier terme égale le premier plus six fois la raison. Si du dernier terme on retranche le premier, la différence 18 égale six fois la raison; en divisant cette différence par 6, on a la raison elle-même 3. Ainsi :

Règle. *Pour trouver la raison de la progression, prenez la*

différence des deux nombres donnés, et divisez cette différence par le nombre des moyens à insérer plus un.

Une fois qu'on connaît la raison de la progression, il est facile de former les moyens demandés; en ajoutant la raison au plus petit des deux nombres donnés, on forme le premier moyen; en l'ajoutant à ce premier moyen on forme le second moyen, et ainsi de suite. On a donc la progression

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20.$$

258. THÉORÈME II. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, on insère un même nombre de moyens arithmétiques, les progressions partielles ainsi formées composent une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression et que la différence de ces deux termes est constante, la raison est la même dans toutes les progressions partielles; d'autre part, comme le dernier terme de chaque progression partielle est le premier de la progression suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

259. THÉORÈME III. *Dans toute progression arithmétique, la somme de deux termes également éloignés des extrémités est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Soit la progression

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier. Le second terme 5 égale le premier plus la raison; l'avant-dernier terme 23 égale le dernier moins la raison : donc la somme $5+23$ égale la somme des extrêmes $2+26$.

Je supprime les deux extrêmes 2 et 26; il reste une progression qui commence à 5 et qui finit à 23. Si l'on répète sur cette progression le même raisonnement, on en conclut que la somme $8+20$ égale $5+23$, et par conséquent la somme des extrêmes $2+26$. Et ainsi de suite.

REMARQUE. La progression précédente renferme un nombre impair de termes; il y a au milieu un terme 14 également distant des deux extrémités. Quand on a supprimé progressivement d'un côté et de l'autre un nombre suffisant de termes, on arrive à la progression

÷ 11 . 14 . 17.

Le terme 14 égale, d'une part 11 plus la raison, d'autre part 17 moins la raison; donc deux fois 14 égale la somme 11+17 et par conséquent la somme des extrêmes 2+26. Ainsi *quand la progression renferme un nombre impair de termes, deux fois le terme du milieu égale la somme des extrêmes.*

260. THÉORÈME IV. *La somme des termes d'une progression arithmétique égale la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre des termes.*

J'écris la progression proposée au-dessous d'elle-même en sens inverse

÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26,
÷ 26 . 23 . 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2;

je remarque que les deux termes qui se correspondent dans ces deux progressions sont des termes également distants des extrémités dans la première progression, et que par conséquent leur somme est constante et égale à la somme des extrêmes 2+26; si donc on additionne les deux progressions terme à terme, la somme totale se composera de la somme des extrêmes 2+26, répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression proposée. Mais cette somme est le double de celle qu'on cherche. Donc la somme des termes de la progression égale la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre des termes.

261. REMARQUE. Il est bon de représenter par des formules les principales propriétés des progressions. Si l'on appelle a, b, c,..... h, k, l, les termes successifs d'une progression arithmétique croissante

$$\div a . b . c .... h . k . l,$$

n le nombre des termes, r la raison, s la somme des termes, on a

$$l = a + (n-1)\, r,$$
$$s = \frac{(a+l)\times n}{2}.$$

Applications. 1° Les nombres entiers consécutifs forment une progression arithmétique croissante dont la raison est l'unité. La somme des n premiers nombres entiers est

$$1+2+3+ \ldots\ldots + n = \frac{(n+1)\times n.}{2}$$

Par exemple, la somme des 20 premiers nombres entiers égale 210.

2° La suite des nombres impairs forme une progression arithmétique croissante dont la raison est 2; le n^{me} terme de la progression est égal à $2n-1$. La somme des n premiers nombres impairs

$$1+3+5+7+ \ldots\ldots + (2n-1) = \frac{2n\times n}{2} = n^2$$

égale le carré de n.

Ainsi :

$$1+3=2^2, \quad 1+3+5=3^2, \quad 1+3+5+7=4^2, \text{ etc.}$$

CHAPITRE IV.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

Définition.

262. On appelle *progression géométrique* une suite de nombres tels que le *quotient* de deux nombres consécutifs est constant. Le quotient de chaque terme par le précédent se nomme *raison*.

La progression est croissante ou décroissante, suivant que la raison est plus grande ou plus petite que l'unité. Voici deux progressions géométriques,

$$\div\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458,$$
$$\div\div\; 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2,$$

l'une croissante, l'autre décroissante. La raison de la première est 3, celle de la seconde $\frac{1}{3}$.

263. Théorème I. *Dans une progression géométrique, un terme de rang quelconque égale le premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Soit la progression

$$\div\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

Le second terme 6 égale le premier multiplié par la raison,

$$6 = 2 \times 3.$$

Le troisième terme égale le second multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la seconde puissance de la raison,

$$18 = 6 \times 3 = 2.3.3 = 2 \times 3^2.$$

Le quatrième terme égale le troisième multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la troisième puissance de la raison,

$$54 = 18 \times 3 = 2.3.3.3 = 2 \times 3^3,$$

et ainsi de suite.

Insérer entre deux nombres donnés un certain nombre de moyens géométriques.

264. On appelle moyens géométriques, insérés entre deux nombres donnés, des nombres qui forment une progression géométrique dont les deux nombres donnés soient les deux extrêmes. La question revient évidemment à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer cinq moyens géométriques entre les deux nombres 2 et 1458. On sait que le dernier terme de la progression 1458 égale le premier 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent; or le nombre des termes qui précèdent le dernier terme, c'est le nombre des moyens à insérer plus un; donc le dernier terme égale le premier multiplié par la sixième puissance de la raison. Si l'on divise 1458 par 2, le quotient 729 est la sixième puissance de la raison; en extrayant la racine sixième de 729, on a la raison elle-même 3. Ainsi :

Règle. *Pour trouver la raison de la progression, divisez le dernier terme par le premier, et extrayez du quotient une racine ayant pour indice le nombre des moyens à insérer plus un.*

Une fois que l'on connaît la raison de la progression, il est facile de former les moyens demandés. En multipliant le premier nombre par la raison, on forme le premier moyen; en multipliant ce premier moyen par la raison, on forme le second moyen, et ainsi de suite. On a donc la progression

$$\div\!\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

265. Théorème II. *Si entre deux termes consécutifs d'une*

progression géométrique on insère un même nombre de moyens géométriques, les progressions partielles ainsi obtenues composent une seule et même progression.

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression, et que le quotient de ces deux termes est constant, la raison sera la même dans toutes les progressions partielles. D'autre part, comme le dernier terme de chaque progression partielle est le premier de la progression suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

266. Théorème III. *Dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également distants des extrémités est constant et égal au produit des extrêmes.*

Soit la progression

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374 : 13122.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier. Le second terme 6 égale le premier multiplié par la raison, l'avant-dernier terme 4374 égale le dernier divisé par la raison; donc le produit 6×4374 égale le produit des extrêmes 2×13122.

Je supprime les deux extrêmes 2 et 13122, il reste une progression qui commence à 6 et finit à 4374. Si l'on répète sur cette progression le même raisonnement, on en conclut que le produit 18×1458 égale le produit 6×4374, et par conséquent le produit des extrêmes 2×13122, et ainsi de suite.

Remarque. La progression précédente renferme un nombre impair de termes; il y a au milieu un terme 162 également distant des deux extrémités. Quand on a supprimé progressivement d'un côté et de l'autre un nombre suffisant de termes, on arrive à la progression

$$\div\div\ 54 : 162 : 486.$$

Le terme 162 égale, d'une part 54 multiplié par la raison, d'autre part 486 divisé par la raison; donc le carré de 162 égale le produit 54×486, et par conséquent le produit des extrêmes

2×13122. Ainsi, *quand la progression renferme un nombre impair de termes, le carré du terme du milieu est égal au produit des extrêmes.*

267. Théorème IV. *On obtient le produit des termes d'une progression géométrique en faisant le produit des extrêmes, élevant ce produit à une puissance marquée par le nombre des termes, et extrayant la racine carrée du résultat.*

J'écris la progression proposée au-dessous d'elle-même, en sens inverse,

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374 : 13122,$$
$$\div\!\div\ 13122 : 4374 : 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2.$$

Je remarque que les deux termes qui se correspondent dans ces deux progressions sont des termes également distants des extrêmes dans la première progression, et que par conséquent leur produit est constant et égal au produit des extrêmes 2×13122. Si donc on fait le produit de tous les termes des deux progressions, considérés comme autant de facteurs, on aura autant de facteurs, égaux chacun au produit des extrêmes, qu'il y a de termes dans la progression; il y a neuf termes; le produit final sera donc la neuvième puissance du produit des extrêmes. Mais, puisqu'on a pris chaque terme deux fois comme facteur, ce produit est égal au carré du produit des termes de la progression proposée; on aura donc le produit demandé en extrayant la racine carrée du résultat.

268. Remarque. Si l'on appelle $a, b, c, \ldots\ldots h, k, l,$ les termes successifs d'une progression géométrique

$$\div\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots\ldots : h : k : l,$$

r la raison, n le nombre des termes, P le produit des termes, on a les formules

$$l = a \times r^{n-1}, \quad P = \sqrt{(a \times l)^n}.$$

Si dans l'expression du produit on remplace le dernier terme l par sa valeur, on trouve

$$P = \sqrt{(a^2 \times r^{n-1})^n} = \sqrt{a^{2n}\, r^{n(n-1)}} = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On demande, par exemple, le produit des sept premiers termes de la progression géométrique dont le premier terme est 5 et la raison 2.

$$\div 5 : 10 : 20 : 40 : \ldots\ldots\ldots$$

En appliquant la seconde formule, on trouve

$$P = 5^7 \times 2^{21} = 2^{14} \times 10^7 = 163840000000.$$

269. Théorème V. *On obtient la somme des termes d'une progression géométrique croissante, en multipliant le dernier terme par la raison, retranchant le premier terme et divisant la différence par la raison diminuée d'une unité.*

Soit la progression géométrique croissante

$$\div 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

J'appelle S la somme des termes

$$S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458.$$

Je multiplie par la raison 3 tous les termes et par conséquent la somme elle-même, en observant que le produit d'un terme par la raison égale le terme suivant; j'ai ainsi

$$S \times 3 = 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 1458 \times 3.$$

De cette seconde somme je retranche la première; tous les termes de la première somme se retranchent, excepté le premier; j'ai donc

$$S \times 3 - S = 1458 \times 3 - 6.$$

De trois fois la somme cherchée, j'ai retranché cette somme elle-même; la différence égale deux fois cette somme, c'est-à-dire le produit de la somme S par la raison diminuée d'une unité. J'obtiendrai donc la somme cherchée S en divisant la différence par la raison diminuée d'une unité; ainsi

$$S = \frac{1458 \times 3 - 6}{3 - 1} = \frac{4368}{2} = 2184.$$

270. Théorème VI. *On obtient la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, en retranchant du pre-*

mier terme le dernier multiplié par la raison, et divisant la différence par l'unité diminuée de la raison.

Soit la progression géométrique décroissante

$$\div 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6.$$

J'appelle S la somme des termes

$$S = 1458 + 486 + 162 + 54 + 18 + 6.$$

En multipliant par la raison $\frac{1}{3}$ tous les termes et par conséquent la somme elle-même, j'ai

$$S \times \frac{1}{3} = 486 + 162 + 54 + 18 + 6 + 6 \times \frac{1}{3}.$$

Je retranche la seconde somme de la première, ce qui donne

$$S - S \times \frac{1}{3} = 1458 - 6 \times \frac{1}{3}.$$

De la somme cherchée S j'ai retranché le $\frac{1}{3}$ de cette somme; la différence égale les $\frac{2}{3}$ de cette somme, c'est-à-dire le produit de la somme S par l'unité diminuée de la raison. J'obtiendrai la somme cherchée en divisant la différence par l'unité diminuée de la raison. Ainsi

$$S = \frac{1458 - 6 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2184.$$

271. REMARQUE I. On pouvait déduire immédiatement le théorème VI du théorème V. Si l'on écrit en ordre inverse les termes de la progression décroissante, on obtient une progression croissante dont la somme est

$$S = \frac{1458 \times 3 - 6}{3 - 1}.$$

En divisant par la raison 3 les deux termes de la fraction, on a

$$S = \frac{1458 - 6 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

272. REMARQUE II. En conservant les notations précédentes, on exprime la somme par la formule

$$S=\frac{l\times r-a}{r-1},$$

si la progression est croissante; par la formule

$$S=\frac{a-l\times r}{1-r},$$

si la progression est décroissante.

On demande, par exemple, la somme des dix premiers termes de la progression

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : \ldots\ldots$$

Le dixième terme égale 2^9; donc

$$S=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023.$$

273. THÉORÈME VII. *La somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini a pour limite le premier terme divisé par l'unité diminuée de la raison.*

La somme des termes d'une progression géométrique décroissante

$$\div a : b : c : d : \ldots\ldots$$

est donnée par la formule

$$S=\frac{a-l\times r}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{l\times r}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la somme augmente, mais en restant toujours plus petite que la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$. Le dernier terme l diminue sans cesse, et l'on voit aisément qu'il devient plus petit que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit. En effet, si le dernier terme restait toujours plus grand qu'une quantité donnée q, les termes précédents étant à plus forte raison plus grands que q, la somme des termes serait plus grande que $q\times n$, et par

conséquent augmenterait au delà de toute limite, ce qui est impossible. Puisque le dernier terme l devient aussi petit qu'on veut, le produit $l \times \frac{r}{1-r}$ de ce dernier terme par la quantité constante $\frac{r}{1-r}$ devient lui-même aussi petit qu'on veut ; donc, si l'on prolonge la progression indéfiniment, la somme des termes s'approche de la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$, de manière que la différence devienne plus petite que toute quantité donnée; en un mot, la somme des termes a pour limite la quantité $\frac{a}{1-r}$.

En appliquant ce théorème à la progression géométrique décroissante

$$\div\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \ldots\ldots$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$, on trouve que la somme des termes tend vers une limite égale à l'unité.

274. Remarque I. Les fractions décimales périodiques ne sont autre chose que des progressions géométriques décroissantes. Par exemple, la fraction décimale périodique simple

$$0{,}35353535\ldots\ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000} + \ldots\ldots ;$$

c'est une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{100}$. D'après le théorème précédent, la somme des termes tend vers la limite

$$\frac{\frac{35}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{35}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{35}{99}.$$

Cette limite est ce qu'on appelle la valeur de la fraction décimale.

275. Remarque II. Nous avons vu (n° 100) comment on forme les diviseurs d'un nombre entier donné, et comment on évalue *à priori* le nombre de ces diviseurs : il est facile aussi de trouver leur somme. Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ un nombre entier décomposé en facteurs premiers; les diviseurs du nombre N sont les différents termes du produit

$$(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)\times(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)\times(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma);$$

le nombre de ces diviseurs est

$$(\alpha+1)\times(\beta+1)\times\gamma+1).$$

Chacune des parenthèses est la somme des termes d'une progression géométrique commençant à l'unité et ayant pour raison, la première *a*, la seconde *b*, la troisième *c*; ces parenthèses ont pour valeurs

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1},\quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},\quad \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}.$$

Donc le produit final, ou la somme des diviseurs égale

$$\frac{(a^{\alpha+1}-1)\times(b^{\beta+1}-1)\times(c^{\gamma+1}-1)}{(a-1)\times(b-1)\times(c-1)}.$$

Par exemple, le nombre 360 étant égal à $2^3\times3^2\times5^1$, le nombre de ses diviseurs est $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)$, c'est-à-dire 24; leur somme est

$$\frac{(2^4-1)\times(3^3-1)\times(5^2-1)}{(2-1)\times(3-1)\times(5-1)} = 1170.$$

LIVRE VI.

DES LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Préliminaires.

276. Soient deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : \ldots.$$
$$\div 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . \ldots.$$

Si l'on désigne généralement par a la raison de la première, par b celle de la seconde, ces deux progressions se mettent sous la forme

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : \ldots\ldots.$$
$$\div 0 . b . 2b . 3b . 4b . 5b . 6b . 7b . 8b . \ldots\ldots.$$

Je remarque que les termes de la progression arithmétique sont les multiples successifs de la raison, que les termes de la progression géométrique sont les puissances successives de la raison.

Ces deux progressions sont disposées de manière que les termes qui occupent le même rang soient placés l'un au-dessous de l'autre; on voit que, dans deux termes correspondants,

par exemple a^5 et $5b$, le même nombre 5 sert à la fois d'exposant et de multiplicateur.

277. Je multiplie deux termes de la progression géométrique, par exemple a^3 et a^5; pour cela j'ajoute les exposants 3 et 5; le produit a^8 est aussi un terme de la progression géométrique. J'additionne les deux termes correspondants $3b$ et $5b$ de la progression arithmétique; j'ajoute 3 fois b à 5 fois b; la somme $8b$ est aussi un terme de la progression arithmétique. On voit que l'exposant du produit a^8 est égal au multiplicateur de la somme $8b$; donc *le produit et la somme se correspondent dans les deux progressions.*

Cette propriété est générale; car si l'on multiplie deux termes quelconques a^m et a^n de la progression géométrique, et si l'on additionne les deux termes correspondants $b\times m$ et $b\times n$ de la progression arithmétique, on obtient un produit a^{m+n} et une somme $b\times(m+n)$, qui se correspondent évidemment dans les deux progressions.

Je divise l'un par l'autre deux termes de la progression géométrique, par exemple a^8 par a^5; pour cela je retranche l'exposant du diviseur de celui du dividende; le quotient a^3 est aussi un terme de la progression géométrique. Je prends la différence entre les termes correspondants $8b$ et $5b$ de la progression arithmétique; je retranche 5 fois b de 8 fois b; la différence $3b$ est aussi un terme de la progression arithmétique. On voit que l'exposant du quotient a^3 est égal au multiplicateur de la différence $3b$; donc *le quotient et la différence se correspondent dans les deux progressions.*

Cette propriété est générale; car si l'on divise a^m par a^n (m étant supposé plus grand que n), et si l'on retranche $b\times n$ de $b\times m$, le quotient a^{m-n} et la différence $b\times(m-n)$ se correspondent dans les deux progressions.

J'élève à une certaine puissance un terme de la progression géométrique, par exemple le terme a^4 à la troisième puissance; pour cela je multiplie l'exposant par l'indice de la

puissance; la puissance a^{12} est aussi un terme de la progression géométrique. Je multiplie par 3 le terme correspondant $4b$ de la progression arithmétique; le produit $12b$ est aussi un terme de la progression arithmétique. On voit que l'exposant de la puissance a^{12} est égal au multiplicateur du produit $12b$; donc *la puissance et le produit se correspondent dans les deux progressions.*

J'élève généralement à la puissance n un terme quelconque a^m de la progression géométrique, et je multiplie par n le terme correspondant $b \times m$ de la progression arithmétique; la puissance $a^{m \times n}$ et le produit $b \times (m \times n)$ se correspondent dans les deux progressions.

J'extrais la racine d'un terme de la progression géométrique, par exemple la racine troisième de a^{12}; pour cela je divise l'exposant par l'indice de la racine (je suppose cette division possible); la racine a^4 est aussi un terme de la progression géométrique. Je divise par 3 le terme correspondant $12b$ de la progression arithmétique; le quotient $4b$ est aussi un terme de la progression arithmétique. On voit que l'exposant de la racine a^4 est égal au multiplicateur du quotient $4b$; donc *la racine et le quotient se correspondent dans les deux progressions.*

278. En arithmétique, on apprend à effectuer six opérations sur les nombres : trois opérations directes et trois opérations inverses. Les trois opérations directes sont : l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances. L'opération fondamentale est l'addition; la multiplication est l'addition de plusieurs nombres égaux; l'élévation à une puissance est le produit de plusieurs facteurs égaux. Les trois opérations inverses sont : la soustraction, la division, l'extraction des racines. La soustraction est l'opération inverse de l'addition; la division est l'opération inverse de la multiplication; l'extraction des racines est l'opération inverse de l'élévation aux puissances.

Il y a ainsi trois ordres d'opérations :

	Opérations directes.	Opérations inverses.
PREMIER ORDRE. .	*Addition*	*Soustraction.*
SECOND ORDRE. .	*Multiplication*	*Division.*
TROISIÈME ORDRE.	*Élév. aux puissances.*	*Extract. des racines.*

Chaque ordre comprend une opération directe et une opération inverse. Les opérations du premier ordre s'effectuent facilement et avec rapidité ; celles du second ordre sont déjà plus longues et plus difficiles; enfin celles du troisième ordre deviennent très-longues et très-pénibles.

Les relations que l'on a reconnues entre deux progressions, l'une géométrique, l'autre arithmétique, permettent de remplacer les opérations par d'autres plus simples. On demande, par exemple, le produit de deux nombres 27 et 243, qui appartiennent à la progression géométrique; j'additionne les deux termes correspondants 6 et 10 de la progression arithmétique, ce qui donne 16 ; je regarde ensuite quel est le terme de la progression géométrique qui correspond à cette somme 16, c'est 6561 ; le produit cherché est 6561, puisque la somme et le produit se correspondent dans les deux progressions.

Diviser 6561 par 243. De 16 je retranche 10, il reste 6 ; à 6 correspond 27 ; le quotient demandé est 27.

Élever 81 au carré. Au terme 81 de la progression géométrique correspond le terme 8 dans la progression arithmétique ; je multiplie 8 par 2, le produit est 16 ; à 16 correspond dans la progression géométrique le terme 6561. Le carré demandé est 6561.

Extraire la racine carrée de 6561. A ce nombre correspond 16; je divise 16 par 2, le quotient est 8 ; à 8 correspond 81 ; la racine cherchée est 81.

De cette manière, la *multiplication* de deux nombres de la progression géométrique est remplacée par l'*addition* des termes correspondants de la progression arithmétique. La *division* est remplacée par la *soustraction* ; une *élévation* aux puissances par une multiplication ; une *extraction* de racine par une division. En un mot, les opérations du second ordre sont remplacées par celles du premier ordre; celles du troisième ordre

par celles du second ordre. Telle est l'origine de la théorie des logarithmes.

Définition des logarithmes.

279. Étant données deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots$$
$$\div 0 . b . 2b . 3b . 4b \ldots\ldots ;$$

les termes de la progression arithmétique sont dits les *logarithmes* des termes correspondants de la progression géométrique. L'ensemble de ces deux progressions constitue un *système* de logarithmes.

Les deux progressions par lesquelles on définit les logarithmes dont on fait habituellement usage, et qu'on appelle pour cette raison *logarithmes vulgaires*, sont les suivantes

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Dans ce système le logarithme de 10 est 1, celui de 100 est 2, etc.

On suppose en général que la raison a de la progression géométrique est plus grande que l'unité; de cette manière les termes de la progression géométrique vont en augmentant et deviennent plus grands que toute quantité donnée; les logarithmes vont aussi en augmentant à l'infini.

J'ai défini les logarithmes des nombres qui font partie de la progression géométrique; il est nécessaire d'étendre cette définition aux autres nombres. Si l'on insère entre deux termes consécutifs de la progression géométrique proposée un très-grand nombre de moyens géométriques, on formera une nouvelle progression géométrique qui renfermera une multitude de nombres. Si, par exemple, on insère mille moyens géométriques entre deux termes consécutifs, la nouvelle progression renfermera mille nombres compris entre 1 et 10, mille entre 10 et 100, etc. En insérant le même nom-

bre de moyens arithmétiques entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique, on formera une nouvelle progression arithmétique qui donnera exactement les logarithmes de tous les nombres inscrits dans la nouvelle progression géométrique, et approximativement les logarithmes de tous les autres nombres.

280. Remarque I. Lorsqu'on insère $n-1$ moyens entre les termes consécutifs des progressions proposées, on forme deux progressions nouvelles ; l'une géométrique, dont la raison, que je représente par q, égale $\sqrt[n]{a}$, l'autre arithmétique dont la raison, que je représente par r, égale $\frac{b}{n}$;

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r \ldots\ldots$$

Un terme quelconque de la nouvelle progression géométrique, étant une puissance de la raison, sera représenté par q^m ou $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ou $\sqrt[n]{a^m}$; le terme correspondant de la progression arithmétique, étant un multiple de la raison, sera $r\times m$ ou $\frac{b\times m}{n}$. Il en résulte que, par l'insertion d'un nombre convenable de moyens, on obtient les logarithmes de tous les nombres qui peuvent se mettre sous la forme $\sqrt[n]{a^m}$.

Afin de mieux fixer les idées à cet égard, je considère le système des logarithmes vulgaires; dans ce système, un terme quelconque de la nouvelle progression géométrique est de la forme $\sqrt[n]{10^m}$ et a pour logarithme $\frac{m}{n}$. Soit A l'un de ces nombres, $A=\sqrt[n]{10^m}$; en élevant à la puissance n, on a $A^n=10^m$; il est impossible d'abord que A soit un nombre commensurable fractionnaire, car sa puissance étant fractionnaire ne serait pas égale à un nombre entier 10^m; d'autre part, parmi les nombres entiers, il n'y a que les puissances de 10 qui, élevées à une certaine puissance, donnent une puissance de 10. Ainsi,

dans le système vulgaire, les puissances de 10 *sont les seuls nombres commensurables qui aient des logarithmes commensurables;* tout autre nombre entier, comme 2, 5, 50, ne fera jamais partie de la progression géométrique, quel que soit le nombre des moyens insérés.

REMARQUE II. Quand on a inséré un très-grand nombre de moyens, les termes consécutifs de la nouvelle progression géométrique diffèrent très-peu l'un de l'autre, de même que les termes consécutifs de la nouvelle progression arithmétique. Lorsqu'un nombre A ne fait pas partie de la progression géométrique, il est compris entre deux termes consécutifs qui en diffèrent très-peu et qui ont leurs logarithmes écrits dans la progression arithmétique; la différence de ces deux logarithmes, étant égale à la raison $\frac{b}{n}$ de la progression arithmétique, peut être rendue aussi petite qu'on veut. On prendra pour logarithme de A l'un ou l'autre de ces deux logarithmes.

Propriétés fondamentales des logarithmes.

281. THÉORÈME I. *Le logarithme d'un produit égale la somme des logarithmes des facteurs.*

Ce théorème a été déjà démontré (nº 277). On a vu en effet que la somme de deux termes de la progression arithmétique correspond au produit des nombres correspondants de la progression géométrique; donc la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme du produit de ces deux nombres.

Soient donc a et b deux nombres quelconques, on a

$$\log.(a \times b) = \log.\ a + \log.\ b.$$

Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque de facteurs.

282. THÉORÈME II. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

Appelons c le quotient de a par b (a étant supposé plus grand que b). On a

$$a = b \times c,$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log.\ a = \log.\ b + \log.\ c;$$

d'où

$$\log.\ c = \log.\ a - \log.\ b.$$

Ainsi

$$\log.\ \frac{a}{b} = \log.\ a - \log.\ b.$$

283. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

En effet, la puissance a^m étant le produit de m facteurs égaux à a, on a

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots..;$$

d'où

$$\log.\ a^m = \log.\ a + \log.\ a + \log.\ a + \ldots..,$$
$$\log.\ a^m = m \log.\ a.$$

Ainsi le logarithme du carré d'un nombre égale deux fois le logarithme de ce nombre, le logarithme du cube égale trois fois le logarithme du nombre, etc.

284. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme du nombre divisé par l'indice du radical.*

Appelons b la racine m^e de a; on a

$$a = b^m;$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log.\ a = m \log.\ b;$$

d'où

$$\log.\ b = \frac{\log.a}{m}.$$

Ainsi

$$\log.\sqrt[m]{a} = \frac{\log.a}{m}.$$

Par exemple, la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre a pour logarithme la moitié ou le tiers du logarithme de ce nombre.

Ces diverses propriétés, qui ont déjà été aperçues dans les préliminaires, remplacent, comme nous l'avons dit, les opérations à effectuer sur les nombres par des opérations plus simples à effectuer sur les logarithmes; mais pour cela il est nécessaire de construire des tables renfermant les logarithmes des nombres.

Construction d'une table de logarithmes.

285. Les logarithmes dont on se sert habituellement, et qu'on appelle *logarithmes vulgaires*, sont définis par les deux progressions

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots..$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots..$$

Le nombre qui a pour logarithme l'unité est la *base* du système de logarithmes. Dans le système vulgaire, la base est 10.

Les tables les plus usitées en France sont les petites tables de Lalande et les grandes tables de Callet. Les tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, avec cinq décimales. Celles de Callet sont plus étendues; elles contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000, avec sept décimales. Pour construire les tables de Lalande, il suffit de déterminer les logarithmes de tous les nombres premiers plus petits que 10000; car, un nombre non premier étant un produit de facteurs premiers, on obtiendra son logarithme en additionnant les logarithmes des facteurs premiers qui le composent. Ainsi, puisque $72 = 2^3 \times 3^2$, on a

$$\log. 72 = 3 \log. 2 + 2 \log. 3.$$

Mais quand on additionne les valeurs approchées des logarithmes, les erreurs peuvent s'ajouter, et par conséquent la même approximation ne se conservera pas jusqu'à la fin. Je

cherche avec combien de décimales il faut calculer les logarithmes des nombres premiers, pour qu'on puisse en déduire les autres logarithmes avec cinq décimales exactes.

En formant par multiplications successives les puissances de 2, on trouve que 2^{14} surpasse 10000 ; il en résulte qu'un nombre inférieur à 10000 renferme au plus 13 facteurs, et que par conséquent l'erreur commise sera répétée au plus 13 fois ; si donc on détermine les logarithmes des nombres premiers avec sept décimales, on aura certainement cinq décimales exactes jusqu'à la fin.

La question est donc celle-ci : déterminer les logarithmes des nombres premiers inférieurs à 10000, avec sept décimales exactes.

286. Je prends pour exemple le nombre 5, et, afin de simplifier, je me propose de déterminer son logarithme à moins de $\frac{1}{100}$ près. Le nombre 5 étant compris entre 1 et 10, son logarithme est compris entre 0 et 1 ; ce sera par conséquent une fraction proprement dite. En insérant $n-1$ moyens, on obtient deux progressions qui ont pour raisons, l'une $\sqrt[n]{10}$, l'autre $\frac{1}{n}$; le nombre 5 étant compris entre deux termes consécutifs de la nouvelle progression géométrique, son logarithme sera compris entre les deux termes correspondants de la progression arithmétique ; la différence de ces deux derniers étant $\frac{1}{n}$, on a ainsi le logarithme de 5 avec une erreur moindre que $\frac{1}{n}$. Comme on veut que l'erreur soit plus petite que $\frac{1}{100}$, on fera $n=100$.

Les deux termes consécutifs de la progression arithmétique sont de la forme $\frac{k}{n}$, $\frac{k+1}{n}$; le nombre 5 est compris entre les deux termes correspondants de la progression géométrique

$\sqrt[n]{10^k}$, $\sqrt[n]{10^{k+1}}$. Si l'on élève à la ne puissance, le nombre 5^n sera compris entre 10^k et 10^{k+1};

$$\sqrt[n]{10^k} < 5 < \sqrt[n]{10^{k+1}},$$
$$10^k < 5^n < 10^{k+1}.$$

Ainsi la détermination de k revient à la recherche de la plus haute puissance de 10 contenue dans 5^{100}.

Je forme par des multiplications successives la 100e puissance de 5, et je compte combien de chiffres elle renferme; elle renferme 70 chiffres. Or un nombre de 70 chiffres est plus grand que l'unité suivie de 69 zéros ou que 10^{69}, plus petit que l'unité suivie de 70 zéros ou que 10^{70}; ainsi 5^{100} est compris entre 10^{69} et 10^{70},

$$10^{69} < 5^{100} < 10^{70}.$$

Il en résulte que le nombre cherché k égale 69. Le logarithme de 5 est donc compris entre 0,69 et 0,70. Ainsi :

RÈGLE. *Pour avoir le logarithme d'un nombre avec une erreur moindre que* $\frac{1}{n}$, *calculez la* n*e* *puissance de ce nombre, et comptez combien de chiffres renferme cette puissance. En désignant par* $k+1$ *ce nombre de chiffres, le logarithme cherché est compris entre* $\frac{k}{n}$ *et* $\frac{k+1}{n}$.

287. REMARQUE I. Si l'on forme un tableau renfermant les puissances successives de 5, on obtiendra deux séries de nombres de plus en plus rapprochés et comprenant entre eux le logarithme cherché

$5^1 = 5$,	......	0,	1,
$5^2 = 25$,	......	$\frac{1}{2}$,	1,
$5^3 = 125$,	......	$\frac{2}{3}$,	1,
$5^4 = 625$,	......	$\frac{2}{4}$,	$\frac{3}{4}$,

$5^5 = 3125$, ... $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,

$5^6 = 15625$, ... $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$,

$5^7 = 78125$, ... $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$,

$5^8 = 390625$, ... $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$,

. . . .

On voit d'abord que le logarithme de 5 est compris entre 0 et 1, puis entre $\frac{1}{2}$ et 1, entre $\frac{2}{3}$ et 1, entre $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$, etc.

288. Remarque II. Mais au lieu de former toutes les puissances successives, il est plus simple de ne former que les puissances qui ont pour indice une puissance de 2; pour cela il suffit de multiplier par elle-même la dernière puissance obtenue;

$5^1 = 5$, ... 0, 1,

$5^2 = 25$, ... $\frac{1}{2}$, 1,

$5^4 = 625$, ... $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$

$5^8 = 390625$, ... $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$

$5^{16} = 152587890625$, ... $\frac{11}{16}$, $\frac{12}{16}$,

. . . .

En multipliant 5^2 par 5^2, on obtient 5^4; en multipliant 5^4 par 5^4, on obtient 5^8, etc. De cette manière, l'approximation croît beaucoup plus rapidement.

Après m opérations, l'exposant est 2^m et la différence des

logarithmes est $\frac{1}{2^m}$. Il est aisé de voir, d'après cela, combien de multiplications il faudra faire pour obtenir le logarithme d'un nombre donné avec une certaine approximation $\frac{1}{n}$. Si l'on veut, par exemple, le logarithme avec cinq décimales exactes ou à moins de $\frac{1}{10^5}$, la différence $\frac{1}{2^m}$ devant être égale ou inférieure à $\frac{1}{10^5}$, on déterminera m de manière que 2^m soit égal ou supérieur à 10^5; or on sait que la 17e puissance de 2 surpasse 10^5; il faudra donc 17 multiplications. Ainsi *le nombre des multiplications nécessaires pour calculer un logarithme avec une approximation marquée par $\frac{1}{n}$, est égal à l'indice de la puissance de 2 égale ou immédiatement supérieure à* n.

Je remarque que le nombre des multiplications nécessaires est le même, quel que soit le nombre dont on cherche le logarithme.

Cependant, malgré la simplification indiquée, le procédé que nous venons d'exposer pour la détermination des logarithmes exige encore des calculs d'une extrême longueur; aussi a-t-on eu recours pour la construction des tables à des procédés plus rapides, qui seront expliqués dans le cours des mathématiques spéciales.

289. Changement de base. La base d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité. La connaissance de la base suffit pour déterminer un système de logarithmes. En effet, si l'on désigne la base par a, on a les deux progressions

$$\because 1 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\ldots;$$

l'une géométrique, l'autre arithmétique, qui définissent complétement les logarithmes.

Si l'on change la base, les logarithmes des mêmes nombres changent ; on a un nouveau système de logarithmes. Il y a donc une infinité de systèmes de logarithmes ; mais il est facile de passer d'un système à un autre. Je suppose que l'on ait construit une table de logarithmes dans le système dont la base est a, et que l'on veuille construire une nouvelle table renfermant les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a'. Soit $\frac{k'}{n'}$ le logarithme d'un nombre A dans le nouveau système, on a

$$A = \sqrt[n']{a'^{k'}}, \text{ ou } A^{n'} = a'^{k'}.$$

En prenant les logarithmes de ces deux quantités égales dans le système dont la base est a (le signe *log.* désignera un logarithme de la première table), on a

$$n' \log. A = k' \log. a';$$
$$\frac{k'}{n'} = \log. A \times \frac{1}{\log. a'}.$$

Mais $\frac{k'}{n'}$ est le logarithme de A dans le nouveau système ; on voit donc que l'on obtient le nouveau logarithme d'un nombre quelconque A en multipliant le logarithme ancien par la quantité constante $\frac{1}{\log. a'}$. Ce multiplicateur constant s'appelle *module* du second système relativement au premier.

CHAPITRE II.

USAGE DES TABLES.

---

290. Les logarithmes ont été calculés en décimales ; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*.

J'écris les deux progressions

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots\ldots$$
$$\div\ 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 . \ldots\ldots$$

qui définissent les logarithmes vulgaires. Tout nombre compris entre 1 et 10 n'a qu'un chiffre à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 0 et 1, est un nombre décimal qui a 0 pour partie entière ou pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres à sa partie entière ; son logarithme, étant compris entre 1 et 2, est un nombre décimal ayant 1 pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 100 et 1000 a trois chiffres à sa partie entière, et son logarithme, étant compris entre 2 et 3, a 2 pour caractéristique, etc. Ainsi *la caractéristique du logarithme d'un nombre renferme autant d'unités que la partie entière du nombre a de chiffres moins un.*

291. Le logarithme de 10^n est n. Si l'on multiplie un nombre a par 10^n, on a

$$\log.\ (a \times 10^n) = \log.\ a + \log.\ 10^n = \log.\ a + n.$$

La partie décimale reste la même ; il suffit d'ajouter n unités à la caractéristique.

Si l'on divise a par 10^n, on a

$$\log \frac{a}{10^n} = \log. a - \log. 10^n = \log. a - n.$$

Ainsi, *pour multiplier ou pour diviser un nombre par* 10, 100, 1000,... *il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique du logarithme de une, deux, trois,.. unités.*

Il en résulte que, lorsque deux nombres décimaux ne diffèrent que par la place qu'occupe la virgule, leurs logarithmes ont même partie décimale et ne diffèrent que par la caractéristique.

Tables de Lalande.

292. Les tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000. Dans la colonne intitulée *nombres* se trouvent les nombres entiers consécutifs; à droite des nombres, dans la colonne intitulée *logarithmes*, sont leurs logarithmes avec cinq décimales.

Pour effectuer les calculs par logarithmes, il faut savoir résoudre les deux questions suivantes : 1° trouver le logarithme d'un nombre donné; 2° trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné. Nous traiterons successivement chacune de ces deux questions.

Trouver le logarithme d'un nombre donné.

293. Lorsqu'il s'agit d'un nombre entier plus petit que 10000, on trouve immédiatement son logarithme dans les tables.

Si le nombre surpasse 10000, on le ramène à être compris entre 100 et 10000, en le divisant par une puissance convenable de 10. Soit le nombre 46527; en le divisant par 10, on a le nombre décimal 4652,7 compris entre 1000 et 10000. Les tables donnent le logarithme de la partie entière 4652. A droite des logarithmes, dans une petite colonne intitulée *différences*, sont inscrites les différences qui existent entre les

logarithmes consécutifs. Entre le logarithme de 4652 et celui de 4653, on lit la différence 9, c'est-à-dire que, si l'on augmentait le nombre 4652 d'une unité, il faudrait ajouter au logarithme 9 unités du cinquième ordre décimal. On admet que les accroissements du logarithme sont sensiblement proportionnels aux accroissements du nombre, au moins quand il s'agit d'accroissements peu considérables. On dira donc : puisque, pour une augmentation d'une unité dans le nombre 4652, il faut ajouter 9 au logarithme, pour une augmentation de 0,7 il faudra ajouter les 7 dixièmes de 9, c'est-à-dire 63 dixièmes ou 6 unités du cinquième ordre, en négligeant les unités plus petites. Ajoutant donc 6 au logarithme de 4652, on écrira

$$\log.\ 4652{,}7 = 3{,}66770.$$

On revient au nombre proposé 46527 en multipliant par 10 le nombre décimal 4652,7 ; on ajoutera donc une unité à la caractéristique du logarithme, et l'on aura

$$\log.\ 46527 = 4{,}66770.$$

Soit le nombre 724687. Divisant par 100, on a le nombre décimal 7246,87. On trouve dans la table le logarithme de la partie entière 7246 et en regard la différence 6. Pour une unité d'augmentation dans le nombre, il faut ajouter 6 au logarithme ; pour 0,87 d'augmentation dans le nombre, il faudra ajouter au logarithme $6 \times 0{,}87$ ou $0{,}87 \times 6$; on voit de suite que cette augmentation est de 5 unités du cinquième ordre. Ajoutant 2 à la caractéristique afin de multiplier par 100, on écrira donc immédiatement

$$\log.\ 724687 = 5{,}86015.$$

Soit encore le nombre 132846. En divisant par 100, on a le nombre décimal 1328,46. On lira dans la table le logarithme de la partie entière 1328 et à côté la différence 32, qu'il faudra multiplier par la partie fractionnaire 0,46 ce qui donne 15. On écrira donc

$$\log.\ 132846 = 5{,}12335.$$

Considérons maintenant un nombre décimal 75,64. Si l'on multiplie ce nombre par 100, on a le nombre entier 7564, dont on trouve le logarithme dans les tables ; retranchant 2 de la caractéristique pour revenir au nombre proposé, on écrira immédiatement

$$\log. 75,64 = 1,87875.$$

Soit encore le nombre décimal 3,46874. Si l'on multiplie ce nombre par 1000, on aura un nombre 3468,74 compris entre 000 et 10000. A côté du logarithme de 3468 on lit la différence 12, que l'on multiplie par 0,74, ce qui donne 9. Ajoutant 9 au logarithme de 3468 et retranchant 3 de la caractéristique, on écrira

$$\log. 3,46874 = 0,54017.$$

Dans la pratique, on se dispense de déplacer la virgule ; on lit dans la table le logarithme du nombre formé par les quatre premiers chiffres de gauche, et on y ajoute le produit de la différence tabulaire par les deux chiffres suivants. Cette multiplication se fait à vue très-rapidement ; dans l'exemple précédent on dira : 12 fois 4 font 48 et retiens 5 ; 12 fois 7 font 84 et 5 font 89 dixièmes ou 9 unités du cinquième ordre décimal à ajouter au logarithme. Quant à la caractéristique, on sait qu'elle contient autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre, moins un.

Il est bon de remarquer que, dans la recherche du logarithme d'un nombre, il n'y a lieu que de considérer les six premiers chiffres de gauche ; les suivants, n'ayant pas d'influence sur le logarithme, peuvent être supprimés. En effet, supposons la virgule placée après le quatrième chiffre, si l'on néglige le chiffre des millièmes et les suivants, on commet sur le nombre une erreur moindre qu'un centième ; la plus grande différence tabulaire est 44 ; on commet donc sur le logarithme une erreur moindre que les 5 dixièmes d'une unité du cinquième ordre décimal.

Caractéristiques négatives.

294. En opérant comme nous l'avons dit, on obtient aisément les logarithmes de tous les nombres fractionnaires plus grands que *un*. Voici comment on obtient les logarithmes des fractions proprement dites. Supposons que l'on ait à multiplier un nombre quelconque 4567 par la fraction décimale 0,03564. Cette fraction peut s'écrire $\frac{3,564}{100}$; multiplier par cette fraction, c'est multiplier par 3,564 et diviser par 100. Il faudra donc ajouter le logarithme de 3,564 qui est 0,55194, et retrancher le logarithme de 100, c'est-à-dire 2. Le logarithme du produit sera donc égal à

$$\log. 4567 + 0,55194 - 2,$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$\log. 4567 + \bar{2},55194.$$

Le signe —, placé au-dessus du chiffre 2, indique qu'il faut retrancher 2 unités. Afin que le logarithme du produit soit toujours égal à la somme des logarithmes des facteurs, on est convenu de regarder l'expression $\bar{2},55194$ comme étant le logarithme de la fraction décimale 0,03564. Le nombre $\bar{2}$, qui tient lieu de la partie entière du logarithme et qui doit être retranché, s'appelle une caractéristique négative.

On voit que *la caractéristique négative du logarithme d'une fraction décimale est égale au rang du premier chiffre significatif après la virgule.*

Trouver le nombre qui admet un logarithme donné.

295. Trouver le nombre qui a pour logarithme 3,12335. On cherche dans la table le plus grand logarithme contenu dans le logarithme donné. C'est 3,12320, qui correspond au nombre 1328. La différence tabulaire est 32, c'est-à-dire que si l'on ajoutait 32 au logarithme, il faudrait ajouter une unité au nombre. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 1328 de 15; pour savoir quelle augmentation dans le nombre

résulte de cette augmentation 15 du logarithme, on divisera 15 par 32. Mais on fera cette division à vue; 150 contient 4 fois 32 et il reste 22; 220 contient 6 fois 32. Puisque la différence 15 contient les 0,46 de 32, il en résulte une augmentation de 0,46 dans le nombre. Le nombre demandé est donc 1328,46.

Trouver le nombre qui a pour logarithme 0,54017. Ajoutons 3 à la caractéristique et cherchons le nombre qui a pour logarithme 3,54017. Le plus grand nombre entier dont le logarithme est contenu dans le logarithme donné est 3468; la différence tabulaire est 12. Le logarithme donné surpasse celui de 3468 de 9 unités du dernier ordre. Une augmentation 12 dans le logarithme produit une augmentation d'une unité dans le nombre; pour avoir celle qui résulte de la différence 9, il faut diviser 9 par 12; 90 contient 7 fois 12, et il reste 6; 60 contient 5 fois 12; il faut donc ajouter 0,75 au nombre, ce qui donne 3468,75. Puisqu'on a ajouté 3 à la caractéristique, il faut diviser par 100, et l'on obtient le nombre demandé 3,46875.

Trouver le nombre qui a pour logarithme $\bar{2}$,84569. Si l'on ajoute 5 à la caractéristique, elle devient égale à 3, et l'on a le logarithme 3,84569. Ce logarithme contient le logarithme de 7009, plus une différence 3. Mais la différence tabulaire est 6; il faut donc ajouter 0,5 au nombre, ce qui fait 7009,5. Comme on a ajouté 5 à la caractéristique, il faut diviser par 100000, et l'on a le nombre demandé 0,070095.

296. Il est aisé de voir que, lorsqu'on remonte des logarithmes aux nombres, on obtient les nombres avec une erreur relative inférieure à un *quarante-millième*. Soit, par exemple, 3,00027 le logarithme donné. Il contient le logarithme de 1000, plus la différence 27, qui, divisée par la différence tabulaire 43, donne l'augmentation 0,63; le nombre demandé est donc 1000,63. Évaluons maintenant l'approximation. Quand on augmente le nombre d'une unité, le logarithme s'accroît de 43 unités du cinquième ordre décimal; pour faire éprouver au logarithme une modification égale à une unité du cinquième

ordre décimal, il faut faire éprouver au nombre une modification égale à $\frac{1}{43}$ d'unité. On obtiendra ainsi le nombre qui correspond au logarithme donné à moins de $\frac{1}{43}$ d'unité ; ce nombre étant plus grand que 10000, l'erreur relative sera moindre que $\frac{1}{40000}$.

La différence tabulaire diminue à mesure qu'on s'avance dans la table; l'erreur absolue commise sur le nombre augmente, mais l'erreur relative reste la même.

Exercices.

1° Calculer le produit des deux nombres 237,56 et 68,432.

On cherchera les logarithmes des deux facteurs et on les ajoutera, ce qui donnera le logarithme du produit; puis on cherchera dans les tables le nombre correspondant. Voici la disposition du calcul, la lettre x désignant le produit demandé :

$$\begin{aligned} \log.\ 237,56 &= 2,37577 \\ \log.\ 68,432 &= 1,83526 \\ \hline \log.\ x &= 4,21103 \\ x &= 16256,7. \end{aligned}$$

2° Calculer le produit des deux nombres 4,5678 et 0,87391.

On multipliera le second facteur par 10, afin de le rendre plus grand que l'unité, et l'on écrira

$$x = \frac{4,5678 \times 8,7391}{10}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ 4,5678 &= 0,65971 \\ \log.\ 8,7391 &= 0,94147 \\ \hline \log.\ x &= 0,60118 \\ x &= 3,9919. \end{aligned}$$

En ajoutant les logarithmes, on trouve 1 pour partie entière ; mais comme il faut retrancher 1, il reste la caractéristique 0.

3° Calculer le produit des deux nombres 0,087952 et 0,0075326.

On multipliera le premier facteur par 100, le second par 1000, afin de les rendre plus grands que l'unité, et l'on écrira

$$x = \frac{8,7952 \times 7,5326}{100000}.$$

$$\log. 8,7952 = 0,94425$$
$$\log. 7,5326 = 0,87695$$
$$\log. x = \bar{4},82120$$
$$x = 0,00066251.$$

En ajoutant les logarithmes on trouve 1 à la partie entière; mais comme il faut retrancher 5, on a la caractéristique négative $\bar{4}$, ce qui indique que le premier chiffre significatif du nombre cherché occupe le quatrième rang après la virgule.

4° Diviser 16256,7 par 237,56.

Du logarithme du dividende on retranchera le logarithme du diviseur :

$$\log. 16256,7 = 4,21103$$
$$\log. 237,56 = 2,37577$$
$$\log. x = 1,83526$$
$$x = 68,432.$$

5° Diviser 3,9919 par 0,87391.

Afin de rendre le diviseur plus grand que l'unité, on multipliera par 10 le dividende et le diviseur, ce qui ne change pas le quotient, et l'on écrira

$$x = \frac{39,919}{8,7391},$$

en désignant par x le quotient cherché; puis on opérera comme dans l'exemple précédent.

6° Diviser 42,537 par 843,62.

On multipliera les deux termes par 100, afin de rendre le dividende plus grand que le diviseur, et l'on écrira

$$x = \frac{4253,7}{843,62 \times 100},$$

$$\begin{aligned} \log. 4253,7 &= 3,62877 \\ \log. 843,62 &= 2,92615 \\ \hline \log. x &= \bar{2},70262 \\ x &= 0,050422. \end{aligned}$$

Du logarithme de 4253,7 on a retranché celui de 848,62, ce qui donne 0 pour partie entière; et comme il faut retrancher 2, on a mis la caractéristique négative $\bar{2}$.

7° Diviser 0,00066251 par 0,087952.

On multipliera d'abord les deux termes par 100, afin de rendre le diviseur plus grand que l'unité, ce qui donne

$$x = \frac{0,066251}{8,7952};$$

on multipliera ensuite par 1000, afin de rendre le dividende plus grand que le diviseur, et l'on écrira

$$x = \frac{66,251}{8,7952 \times 1000}.$$

$$\begin{aligned} \log. 66,251 &= 1,82120 \\ \log. 8,7952 &= 0,94425 \\ \hline \log. x &= \bar{3},87695 \\ x &= 0,0075327. \end{aligned}$$

8° Élever à la dixième puissance le nombre 2,3365.

Il faut pour cela multiplier par 10 le logarithme du nombre donné.

$$\begin{aligned} \log. 2,4365 &= 0,38677 \\ \log. x &= 3,8677 \\ x &= 7374. \end{aligned}$$

9° Élever au cube le nombre 0,41728.

On multipliera le nombre donné par 10, afin de le rendre plus grand que l'unité, et l'on écrira

$$x = \left(\frac{4,1728}{10}\right)^3 = \frac{4,1728^3}{1000}.$$

$$\log.\ 4{,}1728 = 0{,}62043$$
$$\log.\ x = \bar{2}{,}86129$$
$$x = 0{,}072658.$$

En multipliant par 3 le logarithme de 4,1728, on trouve 1 à la partie entière; comme il faut retrancher 3, on a la caractéristique négative $\bar{2}$.

10° Élever à la cinquième puissance la fraction $\frac{20}{37}$.

On écrira

$$x = \left(\frac{20}{37}\right)^5 = \left(\frac{200}{37\times10}\right)^5 = \left(\frac{200}{37}\right)^5 \times \frac{1}{10^5}.$$

$$\log.\ 200 = 2{,}30103$$
$$\log.\ 37 = 1{,}56820$$
$$\log.\ 200 - \log.\ 37 = 0{,}73283$$
$$\log.\ x = \bar{2}{,}66415$$
$$x = 0{,}046149.$$

11° Extraire la racine quatrième de 2.

Il faut diviser par 4 le logarithme de 2.

$$\log.\ 2 = 0{,}30103$$
$$\log.\ x = 0{,}07526$$
$$x = 1{,}18921.$$

12° Extraire la racine carrée de la fraction 0,43512.

On rendra cette fraction plus grande que l'unité en la multipliant par une puissance de 10 qui soit un carré parfait. Il suffira dans cet exemple de multiplier par 100, et l'on écrira

$$x = \sqrt{\frac{43{,}512}{100}} = \frac{\sqrt{43{,}512}}{10}.$$

$$\log.\ 43{,}512 = 1{,}63861$$
$$\log.\ x = \bar{1}{,}81930$$
$$x = 0{,}65963.$$

En divisant par 2 le logarithme de 43,512, on trouve 0 pour partie entière; comme il faut retrancher 1, on a la caractéristique négative $\bar{1}$.

13° Extraire la racine cubique de la fraction décimale 0,00072658.

On rendra cette fraction plus grande que l'unité en la multipliant par une puissance de 10 qui soit un cube parfait, et l'on écrira

$$x=\sqrt[3]{\frac{726,58}{10^6}}=\frac{\sqrt[3]{726,58}}{100},$$

$$\log.\ 726,58=2,86129$$
$$\log.\ x=\bar{2},95376$$
$$x=0,08990.$$

297. On sait que pour effectuer une division, il faut du logarithme du dividende retrancher le logarithme du diviseur. Lorsqu'on n'a qu'une simple division à faire, on peut procéder de cette manière; mais, quand on a une série de multiplications et de divisions à effectuer, il est plus commode de n'avoir que des logarithmes à ajouter. Pour cela on transforme les logarithmes à retrancher, de manière que l'on ait à ajouter les parties décimales.

Soit, par exemple, à calculer

$$x=\frac{236,39\times127,46}{564,87}.$$

Il faut retrancher le logarithme de 564,87, qui est 2,75195. On écrira

$$-2,75195=-2-0,75195=-3+1-0,75195$$
$$=-3+0,24805=\bar{3},24805.$$

On aura donc

$$\log.\ 236,39=2,37363$$
$$\log.\ 127,46=2,10537$$
$$-\log.\ 564,87=\bar{3},24805$$
$$\overline{\log.\ x=1,72705}$$
$$x=53,340.$$

Quand on a ainsi rendu additive la partie décimale de

—log 564,87, on additionne les parties décimales des trois logarithmes; la soustraction ne porte plus que sur la caractéristique $\bar{3}$, ce qui est une grande simplification.

Remarquons cette manière de procéder : *Pour retrancher un logarithme, on retranche une unité de la caractéristique changée de signe et l'on écrit à la suite le complément arithmétique de la partie décimale.*

Ainsi, au lieu de retrancher 2,75195, on a ajouté $\bar{3}$,24805. La caractéristique 2, changée de signe, et diminuée d'une unité, donne $\bar{3}$; en prenant l'excès de l'unité sur la partie décimale 75195, on obtient 24805.

Quant à l'excès de l'unité sur la partie décimale du logarithme, ce qu'on appelle le complément arithmétique, on l'obtient aisément. De 1 il faut retrancher 0,75195. Or, une unité vaut 9 dixièmes et 10 centièmes; 10 centièmes valent 9 centièmes et 10 millièmes, etc. L'unité égale donc 0,9999 plus 10 unités du cinquième ordre. En effectuant la soustraction de gauche à droite, on obtient le complément demandé:

$$\begin{array}{r} 0,9999 \\ 0,75195 \\ \hline 0,24805. \end{array}$$

Ainsi, *pour avoir le complément de la partie décimale d'un logarithme, on retranche tous les chiffres de 9, en allant de gauche à droite, excepté le dernier que l'on retranche de* 10.

Avec un peu d'habitude, on lit immédiatement le complément dans la table, en regardant le logarithme.

Tables de Callet.

298. Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000. La première partie de la table, nommée première *chiliade* (premier mille), contient les logarithmes des 1200 premiers nombres avec huit décimales. La table change ensuite de disposition, et donne les logarithmes

des nombres de 10200 à 100000, avec sept décimales; à la fin, la table se prolonge de 100000 à 108000, avec huit décimales. Dans la colonne verticale intitulée N, on lit les dizaines des nombres; les unités sont inscrites au haut de la page et en tête des dix colonnes intitulées 0, 1, 2.... 8, 9. La caractéristique n'est pas indiquée; il est facile de l'ajouter d'après la règle énoncée. Dans la colonne voisine, on trouve les trois premiers chiffres décimaux de chaque logarithme; les quatre suivants sont inscrits dans la colonne convenable. Si l'on veut, par exemple, le logarithme du nombre 35647, dans la colonne verticale intitulée N, on descendra jusqu'au nombre 3564, puis, dans cette ligne horizontale, on s'avancera vers la droite jusqu'à la colonne intitulée 7, et l'on écrira :

$$\log.\ 35647 = 4{,}5520230.$$

Le nombre ayant cinq chiffres, on commencera par écrire sa caractéristique 4; les trois premiers chiffres décimaux 552 sont communs à un assez grand nombre de logarithmes; on trouve les quatre derniers 0230, dans la colonne verticale intitulée 7.

Lorsqu'un nombre entier est plus petit que 108000, on trouve immédiatement dans les tables son logarithme.

Si le nombre surpasse la limite des tables, on l'y ramène en le divisant par une puissance de 10. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 356478. Afin de rendre ce nombre plus petit que 100000, on le divise par 10, ce qui donne le nombre décimal 35647,8. La question revient à chercher le logarithme de ce nombre décimal; car, une fois le logarithme trouvé, en ajoutant 1 à sa caractéristique, on aura le logarithme demandé.

Les tables donnent le logarithme de la partie entière 35647. La différence entre ce logarithme et celui du nombre suivant 35648 est 122 unités du septième ordre décimal. Dans la dernière colonne verticale à droite, on voit, au-dessous de la différence 122, un petit tableau indiquant les augmentations du logarithme qui correspondent à 1, 2, 3,.....9 dixièmes. Ainsi

log. 35647=4,5520230
pour 0,8=. . . . 98

log. 356478=4,5520328

En ajoutant une unité à la caractéristique, on a

log. 356478=5,5520328.

Soit encore à calculer le logarithme du nombre 2543247. En divisant par 100, on ramènera le nombre proposé au nombre décimal 25432,47. La table donne le logarithme de la partie entière. La table des parties proportionnelles montre qu'à une augmentation 0,4 dans le nombre correspond une augmentation 68 dans le logarithme. Il reste à trouver ce qu'il faut encore ajouter pour 0,07. On voit dans la table qu'à 0,7 correspond une augmentation 120; à 0,07 correspondra donc une augmentation dix fois plus petite, soit 12. Il faut donc au logarithme de 25432 ajouter 68+12, c'est-à-dire 80. Faisant le calcul de tête, on écrira de suite

log. 25432,47=4,4053885.

En ajoutant 2 unités à la caractéristique, on en déduit

log. 2543247=6,4853885.

Il est à remarquer que, dans le calcul de l'augmentation du logarithme, on doit tenir compte seulement des trois premiers chiffres décimaux du nombre proposé; on négligera les suivants, parce qu'ils n'ont pas d'influence sur les sept premiers chiffres décimaux du logarithme. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 11056,4852. Après avoir cherché dans les tables le logarithme de 11056, on dira, à l'aide des parties proportionnelles placées au-dessous de la différence 393 : à 0,4 correspond 157, à 0,08 correspond 31, à 0,005 correspond 2; en tout 190 qu'il faut ajouter au logarithme de 11056, ce qui donne

log. 11056,485=4,0436170.

Le plus souvent même le troisième chiffre décimal n'a pas d'influence sensible sur le résultat. Soit à trouver le logarithme de 46867,284. Après avoir trouvé le logarithme de 46867, on

voit qu'à 0,2 correspond une augmentation 18, à 0,08 une augmentation 7 ; le chiffre des millièmes n'a pas d'influence ; il faut donc ajouter 18+7 ou 25 au logarithme de 46867, ce qui donne

log. 46867,28=4,6708697.

Quand le chiffre des millièmes est plus grand que 5, on force le chiffre des centièmes.

Pour trouver le logarithme d'un nombre décimal, on le multiplie ou on le divise par une puissance de 10, de manière qu'il se rapproche le plus possible de la limite des tables. Soit le nombre décimal 35,6478 ; on multipliera par 1000 et on cherchera le logarithme du nombre 35647,8 ; puis on retranchera trois unités de la caractéristique :

log. 35647,8=4,5520328
log. 35,6478=1,5520328.

299. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 avec les tables de Callet. On regarde dans les tables quel est le plus grand logarithme contenu dans le logarithme donné ; c'est 4,5520230 qui correspond au nombre 35647 ; le nombre cherché est donc compris entre 35647 et 35648. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 35647 de 102 unités du septième ordre : or, la différence tabulaire est 122, c'est-à-dire que si l'on augmentait le logarithme de 35647 de 122 unités du dernier ordre, il faudrait augmenter d'une unité le nombre 35647 ; si l'on suppose les accroissements du nombre proportionnels à ceux du logarithme, à une augmentation 102 dans le logarithme correspondra dans le nombre une augmentation égale à $\frac{102}{122}=0,83$.

Mais il est plus commode de se servir de la petite table des parties proportionnelles : cette table montre qu'à une augmentation 98 dans le logarithme correspond une augmentation 0,8 dans le nombre. Il nous reste 4 ; à l'augmentation 40 dans le logarithme correspond une augmentation 0,3 dans le nombre ; à l'augmentation dix fois plus petite 4 correspondra

donc une augmentation 0,03. Ainsi à l'augmentation 102 dans le logarithme correspond une augmentation 0,83 dans le nombre. Le nombre cherché est donc 35647,83 à un centième près.

On ramène toujours la caractéristique du logarithme donné à être égale à 4, sauf à multiplier ou à diviser ensuite le nombre trouvé par une puissance de 10.

Exemples : 1° Trouver le nombre qui a pour logarithme 5,5520332. Je retranche 1 de la caractéristique pour ramener le logarithme dans les limites des tables, et je cherche le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 ; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme donné, il faut ajouter 1 à la caractéristique, et par conséquent multiplier par 10 : le nombre cherché est donc 356478,3 à un dixième près.

2° Trouver le nombre qui a pour logarithme 1,5520332. On ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on cherchera le nombre qui a pour logarithme 4,5520332; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme proposé, il faut retrancher 3 de la caractéristique, et par conséquent diviser par 1000; le nombre cherché est donc 35,64783 avec cinq décimales exactes.

On voit qu'il y a un grand avantage à augmenter la caractéristique de manière à opérer dans la partie la plus élevée des tables; si l'on avait conservé la caractéristique 1, on aurait trouvé le nombre 35,65 avec deux décimales seulement, tandis qu'en opérant comme on l'a fait, on a obtenu cinq décimales.

3° Trouver le nombre qui a pour logarithme $\overline{2}$,5520332. Je cherche le nombre qui a pour logarithme 0,5520332; c'est 3,564783. La caractéristique négative 2 indique qu'il faut diviser ce nombre par 100; le nombre demandé est donc 0,03564783.

300. Il est aisé de voir que lorsqu'on remonte des logarithmes aux nombres, avec les tables de Callet, on obtient les nombres avec une approximation relative égale à un *quatre-millionième*. Soit, par exemple, 4,0359772 le logarithme donné.

Il contient le logarithme de 10863, plus la différence 374, qui, divisée par la différence tabulaire 400, donne l'augmentation 0,685; le nombre cherché est 10863,685. Évaluons maintenant l'approximation. Quand le nombre varie d'une unité, le logarithme éprouve une variation égale à la différence tabulaire 400 unités du septième ordre décimal ; il faut donc une variation de $\frac{1}{400}$ dans le nombre pour produire dans le logarithme une variation d'une unité du septième ordre décimal ; ainsi on obtiendra le nombre à moins de $\frac{1}{400}$ près. Le nombre étant plus grand que 10000, l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{4000000}$. Dans l'exemple actuel, l'erreur absolue étant moindre que $\frac{1}{400}$ ou que 0,0025, on n'est pas sûr du dernier chiffre 5 ; cependant, comme il est approché à moins de trois unités, il est bon de le conserver.

L'erreur absolue augmente à mesure qu'on s'élève dans la table, mais l'erreur relative reste la même. Soit, par exemple, 4,6020673 le logarithme donné. L'erreur absolue commise sur le nombre s'élève ici à $\frac{1}{100}$; mais le nombre est plus grand que 40000; l'erreur relative est encore moindre que $\frac{1}{4000000}$.

301. *Remarques sur les accroissements des logarithmes.* En examinant dans les tables la colonne des différences, on voit ces différences aller sans cesse en diminuant. Par exemple, les logarithmes des nombres 486 et 487 diffèrent entre eux de 8027 unités du septième ordre, tandis que ceux des nombres 48624 et 48625 ne diffèrent plus que de 89 unités du même ordre. Il est facile d'expliquer la cause de cette diminution. Soient a et $a + 1$ deux nombres entiers consécutifs, la différence de leurs logarithmes est

$$\log.\ (a+1) - \log.\ a = \log.\ \frac{a+1}{a} = \log.\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

or, à mesure que a augmente, $1+\frac{1}{a}$ diminue et tend vers l'unité : la différence tabulaire diminue donc et tend vers zéro. Si l'on prolongeait les tables indéfiniment, cette différence deviendrait infiniment petite.

Je donne au nombre a un accroissement constant quelconque h ; l'accroissement du logarithme

$$\log.(a+h) - \log.\ a = \log.\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log.\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

sera d'autant plus petit que a sera plus grand. Ainsi, pour un même accroissement *absolu* donné au nombre, l'accroissement du logarithme diminue à mesure que le nombre augmente. Mais si l'on donnait au nombre un même accroissement *relatif* (j'entends par accroissement relatif le rapport de l'accroissement absolu au nombre lui-même ; un nombre, par exemple, éprouve un accroissement relatif de $\frac{1}{1000}$ si on l'augmente de la $\frac{1}{1000}$ partie de sa valeur), l'accroissement du logarithme serait constant. En désignant par k l'accroissement relatif $k = \frac{h}{a}$, l'accroissement du logarithme devient $\log\ (1+k)$; c'est une quantité constante, si l'accroissement relatif reste le même.

302. Dans la recherche des logarithmes des nombres, on a supposé les accroissements du logarithme proportionnels à ceux du nombre ; cette proportion n'est pas exacte. En effet, si l'on donne au nombre a l'accroissement h, le logarithme subit un certain accroissement ; si l'on donne au nombre $a+h$ le même accroissement h, le logarithme subit un nouvel accroissement plus petit que le premier ; ainsi quand l'accroissement du nombre devient double, l'accroissement du logarithme est un peu moindre que le double ; et réciproquement, quand l'accroissement du nombre devient moitié, l'accroissement du logarithme est un peu plus grand que la moitié.

L'emploi de la proportion donne donc dans le passage des nombres aux logarithmes des résultats un peu trop faibles, et dans le passage des logarithmes aux nombres des résultats un peu trop forts.

Mais si l'on a soin d'employer toujours la partie la plus élevée des tables, l'erreur commise sur les logarithmes n'affectera pas les unités du septième ordre décimal ; et en effet, dans les tables de Callet, on voit que la même différence tabulaire existe entre plusieurs couples de logarithmes consécutifs. Par exemple, du nombre 68595 au nombre 69744 la différence tabulaire est la même. Dans cet intervalle, pour une unité d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit un accroissement constant 63 ; pour deux, trois... unités d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit donc un accroissement deux, trois... fois plus grand, et par conséquent les accroissements du nombre sont proportionnels à ceux du logarithme, du moins au degré d'approximation des tables.

CHAPITRE III.

DES INTÉRÊTS COMPOSÉS.

303. Ordinairement les intérêts d'un capital prêté se payent chaque année et constituent une rente; mais il arrive quelquefois qu'on laisse les intérêts s'ajouter au capital, de manière que le capital s'accroisse d'année en année : c'est là ce qu'on appelle *capitaliser* les intérêts, ou placer à *intérêts composés.*

On a appelé *taux* de l'intérêt ce que rapportent 100 francs dans un an; mais, dans le calcul des intérêts composés, il est plus commode de prendre pour taux l'intérêt de *un* franc en un an, intérêt que pour abréger nous désignerons par la lettre r. Ainsi, placer à 5 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,05 pour 1 ; dans ce cas $r = 0{,}05$; placer à 4,50 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,045 pour 1 ; dans ce cas, $r = 0{,}045$.

304. Le capital *un* franc, augmenté de son intérêt, vaut, après une année, $1 + r$; un capital 2460 francs vaudra 2460 fois plus, c'est-à-dire $(1 + r) \times 2460$ ou $2460\,(1 + r)$. En général, si l'on représente par a un capital quelconque, sa valeur au bout d'un an, par l'addition des intérêts, sera $a\,(1 + r)$. Ainsi, *on obtient la valeur d'un capital après une année en multipliant ce capital par l'unité augmentée de l'intérêt de un franc.*

Par exemple, le capital 2460 francs placé à 5 pour 100 vaut au bout d'un an $2460 \times 1{,}05 = 2583$.

Je suppose maintenant que le capital a soit placé pendant n

années. Après une année ce capital devient $a\ (1+r)$; tel est le capital dû à la fin de la première année et qui produit intérêt pendant la seconde année. Pour avoir ce que devient ce capital $a\ (1+r)$ par l'addition des intérêts de la seconde année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a\ (1+r)\ (1+r)$ ou $a\ (1+r)^2$; tel est le capital dû à la fin de la seconde année, et qui produit intérêt pendant la troisième année. Pour savoir ce que devient ce capital $a\ (1+r)^2$, par l'addition des intérêts de la troisième année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a\ (1+r)^2\ (1+r)$ ou $a\ (1+r)^3$; tel est le capital dû à la fin de la troisième année, et qui produit intérêt pendant la quatrième année. Le même raisonnement peut être continué indéfiniment ; et comme chaque année nouvelle introduit un nouveau facteur $1+r$, la valeur du capital, après n années, sera $a\ (1+r)^n$. Ainsi, *on obtient la valeur d'un capital, placé à intérêts composés, après un certain nombre d'années, en multipliant ce capital par la valeur d'un franc après un an, élevée à une puissance marquée par le nombre des années.*

Si donc l'on désigne par A la valeur du capital après n années, on a la formule générale

$$A = a\ (1+r)^n.$$

Cette formule établit une relation entre les quatre quantités représentées par a, A, n, r, relation qui détermine l'une quelconque d'entre elles, quand on connaît les trois autres. On peut donc, à l'aide de cette relation, résoudre les quatre questions suivantes.

305. Problème I. *Quelle est la valeur d'un capital placé à intérêts composés, au taux* r, *après* n *années?*

C'est la question traitée précédemment : on calculera A par logarithmes.

Exemple. Trouver la valeur du capital 12540 francs, placé à intérêts composés, à 5 pour 100, après 7 ans.

Je suppose dans tout ce qui suit que l'on opère avec les tables de Lalande.

log. 12540. . . . . $=4,09830$
log. 1,05 $=0,02119$
7 log. 1,05 . . . . $=0,14833$

log. A. . . . . . $=4,24663$

$A=17645$ francs.

306. Problème II. *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, au taux* r, *acquiert, après* n *années, une valeur* A?

La formule précédente donne

$$a=\frac{A}{(a+r)^n}.$$

Exemple. Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, à 4,75 pour 100, vaut 24600 francs, après 12 années ?

log. 24600. . . . . $=4,39094$
log. 1,0475 $=0,02015$
12 log. 1,0475 $=$ . . . . . . $=0,24180$

log. a. . . . . . $=4,14914$

$a=14095$ francs.

307. Problème III. *A quel taux faut-il placer un capital* a, *à intérêts composés, pour qu'après* n *années il acquière une valeur* A? L'inconnue ici est r; de la formule fondamentale on déduit

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

On calculera de cette manière la quantité $1+r$; retranchant 1 du résultat, on aura r.

Exemple. A quel taux faut-il placer le capital 14095 francs pour qu'après douze années il vaille 24600 francs?

log. 24600............ = 4,39094
log. 14095............ = 4,14908

$$\log. A - \log. a = 0{,}24182$$
$$\log. (1+r) = 0{,}02015$$
$$1+r = 1{,}0475,$$
$$r = 0{,}0475.$$

Il faut placer le capital à 4,75 pour 100.

308. Problème IV. *Pendant combien d'années faut-il placer un capital* a, *au taux* r, *à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur* A?

L'inconnue est n; de la formule fondamentale on déduit

$$(1+r)^n = \frac{A}{a},$$

et, en prenant les logarithmes,

$$n \log. (1+r) = \log. A - \log. a;$$

d'où

$$n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. (1+r)}.$$

309. Remarque. La formule des intérêts composés a été établie dans l'hypothèse où le capital reste placé pendant un nombre entier d'années. Lorsque le capital reste placé pendant un certain nombre d'années, plus une fraction d'année, on cherche d'abord sa valeur après le nombre entier d'années par la formule des intérêts composés, puis on calcule les intérêts simples de ce nouveau capital pendant la fraction d'années.

Mais il sera plus simple d'appliquer la formule ordinaire

$$A = a(1+r)^n,$$

dans laquelle on donnera à n des valeurs fractionnaires; la différence des résultats est négligeable.

Exemple I. Quelle est la valeur du capital 12540 francs, placé à intérêts composés à 5 pour 100, après sept ans huit mois?

Après sept ans, le capital devient 17645 francs; ce nouveau capital rapporte 588 francs en huit mois; donc, après sept ans huit mois, le capital devient 18233 francs.

En donnant à n la valeur fractionnaire $7+\frac{8}{12}$, on trouve 18228 francs; la différence est 5 francs; c'est une quantité relativement très-petite; elle est plus petite que le $\frac{1}{2000}$ de la grandeur cherchée.

Exemple II. Pendant combien d'années faut-il placer un capital à intérêts composés à 5 pour 100 pour qu'il acquière une valeur double?

Comme la grandeur du capital n'a aucune influence dans la question, je suppose qu'il s'agisse du capital 1000 francs.

$$n=\frac{\log. 2}{\log. 1,05};$$

$\log. 2 \quad =0,30103$	$\log. 0,30103 \quad =\bar{1},47861$
$\log. 1,05=0,02119$	$\log. 0,0211893=\bar{2},32612$
	$\log. n =1,15249$

$$n=14,207.$$

Après quatorze années le capital n'est pas encore doublé; après quinze années il est plus que doublé. Après quatorze années, le capital 1000 francs devient 1979,93; si l'on cherche dans combien de jours le capital 1979,93 produira ce qui manque pour que le capital primitif soit doublé, c'est-à-dire 20,07, on trouve soixante-quatorze jours. Ainsi à 5 pour 100, le capital est doublé en quatorze ans soixante-quatorze jours.

Si l'on prend la valeur fractionnaire $n=14,207$ donnée par le calcul, on trouve quatorze ans soixante-quinze jours. La différence n'est que d'un jour.

Exemple III. A quel taux faut-il placer un capital de 12000 fr. à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur de 18000 francs après neuf ans cinq mois?

Dans la formule des intérêts composés, on donnera à n la

valeur fractionnaire $9+\frac{5}{12}$. Il serait très-difficile de résoudre autrement la question.

310. Problème V. On a deux billets, l'un d'une somme a, payable dans un an; l'autre d'une somme b, payable dans cinq ans, et on veut les convertir en un seul payable dans trois ans.

Cherchons la valeur de chacun des deux billets dans trois ans à l'échéance du troisième billet. A cette époque, deux ans après son échéance, le premier billet vaudra

$$a(1+r)^2;$$

à cette même époque, deux ans avant son échéance, le second billet vaut

$$\frac{b}{(1+r)^2}.$$

Si l'on appelle x la somme qui doit être inscrite sur le troisième billet, c'est-à-dire la somme à toucher dans trois ans, on aura

$$x=a(1+r)^2+\frac{b}{(1+r)^2}.$$

311. Problème VI. *La population d'un État est de 40 millions d'habitants, elle s'accroît chaque année de $\frac{1}{300}$ de sa valeur; on demande quelle sera la population de cet État dans un siècle.*

J'appelle P la population après un certain nombre d'années; l'année suivante elle sera

$$P+\frac{P}{300}=P\times\left(1+\frac{1}{300}\right)=P\times\frac{301}{300}.$$

Ainsi la population croît année par année, comme les termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 40 millions et la raison $\frac{300}{301}$. On demande le 101e terme de la progression; en désignant par x ce terme, on a

$$x = 40000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^{100}.$$

$$x = 55793600.$$

312. PROBLÈME VII. *Les populations de deux Etats sont, l'une de* 20 *millions d'habitants, l'autre de* 30 *millions; la première s'accroît chaque année de* $\frac{1}{200}$, *la seconde de* $\frac{1}{300}$. *Dans combien de temps les deux populations seront-elles égales?*

J'appelle n le nombre d'années cherché; après ce nombre d'années, les deux populations étant égales, on aura

$$20000000 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 30000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n :$$

d'où

$$2 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 3 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n,$$

$$\left(\frac{201 \times 300}{200 \times 301}\right)^n = \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{603}{602}\right)^n = \frac{3}{2}.$$

Si l'on prend les logarithmes, il vient

$$n\,(\log.603 - \log.602) = \log.3 - \log.2,$$

$$n = \frac{\log.3 - \log.2}{\log.603 - \log.602};$$

$n = 244$ ans et une fraction.

Questions d'annuités.

313. PROBLÈME VIII. *Une personne place chaque année une somme* a *pendant* n *années, et laisse les capitaux et les intérêts s'accumuler. On demande quelle sera la valeur totale de tous ces placements après ces* n *années?*

Le premier versement, étant placé pendant n années, acquiert une valeur égale à $a\,(1+r)^n$; le second, étant placé pendant $n-1$ années, acquiert une valeur égale à $a\,(1+r)^{n-1}$, etc.;

enfin le dernier, ne restant placé que pendant un an, vaut $a(1+r)$. La valeur totale après les n années est donc

$$a(1+r)+a(1+r)^2\ldots\ldots+a(1+r)^n;$$

c'est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $1+r$; cette somme égale

$$A=\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Il est impossible de soumettre directement cette formule au calcul logarithmique; on est obligé de faire deux calculs séparés. On calculera d'abord la quantité $(1+r)^n$, puis A.

Exemple. On place chaque année 1000 francs pendant vingt ans à 5 pour 100.

$$A=1000\times\frac{1{,}05(1{,}05^{20}-1)}{0{,}05}=21000\times(1{,}05^{20}-1).$$

CALCUL DE $1{,}05^{20}$.	CALCUL DE A.
log. 1,05 = 0,02119	log. 21000 = 4,32222
20 log. 1,05 = 0,42380	log. 1,6533 = 0,21835
$1{,}05^{20}$ = 2,6533	log. A = 4,54057
	A = 34719 francs.

314. Problème IX. *Une personne emprunte actuellement une somme* A, *et voudrait se libérer en* n *années par* n *payements égaux effectués à la fin de chaque année. On demande quel doit être le montant de chacun des payements?*

Je désigne par x le montant de chaque payement et je suppose qu'on règle les comptes à fin de la n^e année; la somme due est alors $A(1+r)^n$. Le premier versement, ayant été fait $n-1$ années auparavant, vaut, au moment du règlement, $x(1+r)^{n-1}$; le second versement, ayant été fait $n-2$ années auparavant, vaut $x(1+r)^{n-2}$, et ainsi de suite; l'avant-dernier versement, ayant été fait il y a un an, vaut $x(1+r)$; enfin le dernier, étant fait au moment même, vaut x. La valeur

totale des n payements annuels est donc, au moment du règlement de compte,

$$x + x(1+r) + x(1+r)^2 \ldots\ldots + x(1+r)^{n-1},$$

ou, en faisant la somme,

$$x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Pour que la dette soit acquittée, il faut que cette valeur totale soit égale à la somme due; on a donc

$$x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} = A(1+r)^n;$$

d'où

$$x = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Cette formule présente le même inconvénient que la précédente; il est impossible de la soumettre directement au calcul logarithmique. On calculera d'abord $(1+r)^n$; puis x.

LIVRE VII.

COMPLÉMENT.

CHAPITRE I.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE NUMÉRATION.

315. Nous avons expliqué au commencement de l'arithmétique comment on compte les objets en les groupant par collections de dix en dix fois plus grandes; il est clair que l'on aurait pu grouper les objets d'une autre manière, par exemple par collections de douze en douze fois plus grandes. Le nombre qui détermine le mode du groupement s'appelle *base* du système de numération; un nombre quelconque peut servir de base; le système dont la base est *dix* est devenu d'un usage universel parmi les hommes; c'est dans ce système que l'on écrit les nombres; cependant, afin de mieux comprendre le mécanisme du calcul, il est bon de considérer les nombres et de s'exercer à les écrire dans un autre système. Je prendrai pour type le système duodécimal.

Numération duodécimale.

316. Dans ce système les unités des différents ordres sont de douze en douze fois plus grandes; chacun des onze premiers nombres a reçu un nom particulier; la *douzaine* est

l'unité du second ordre ; nous désignerons par les mots *vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, octante, nonante, dizante* et *onzante,* les collections de deux, trois........, dix, onze douzaines. La réunion de douze douzaines forme l'unité du troisième ordre ou la *centaine;* la réunion de douze centaines forme l'unité du quatrième ordre ou le *mille,* puis viennent la *douzaine de mille,* la *centaine de mille,* le *million,* etc.

Quand on a ainsi groupé les objets que l'on veut compter par collections de douze en douze fois plus grandes, pour énoncer le nombre des objets, on dit combien il y a d'unités de chaque ordre (et il y en a au plus onze), en commençant par l'ordre le plus élevé et descendant progressivement. On a, par exemple: *quarante-sept* MILLIONS *trois cent dizante onze* MILLE *dix cent douze cinq* UNITÉS.

Pour écrire les nombre dans le système duodécimal, il faut d'abord imaginer onze caractères ou chiffres pour représenter les onze premiers nombres; on conservera naturellement aux neufs premiers nombres leurs caractères habituels, et l'on adoptera les lettres grecques α et β pour désigner les nombres dix et onze, de sorte que les onze premiers nombres seront représentés par les chiffres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \alpha,\ \beta.$$

Puis on indiquera l'ordre des unités par le rang du chiffre à partir de la droite; de cette manière, le nombre précédent s'écrira

$$473\alpha\beta\alpha15.$$

On emploiera le chiffre 0 pour remplir les places vacantes; le nombre douze, ou une unité de second ordre, s'écrira 10; le nombre *octante* MILLIONS *dix cent trois* MILLE *cinquante onze* UNITÉS s'écrira

$$80\alpha0305\beta.$$

On voit que pour écrire les nombres dans le système duodécimal il faut douze chiffres; en général, il faut un nombre de chiffres marqué par la base du système de numération.

317. A ce point de vue, le système le plus simple serait celui dont la base est deux; dans ce système les deux chiffres 1 et 0 suffisent pour écrire tous les nombres. Le nombre deux, étant l'unité du second ordre, s'écrira 10; le nombre trois s'énoncera deux un et s'écrira 11 ; le nombre quatre ou deux fois deux, formant l'unité du troisième ordre, s'énoncera cent et s'écrira 100; de même les nombres cinq, six, sept, huit, s'écriront 101, 110, 111, 1000; on voit par là que, si le système binaire est le plus simple en ce sens que les deux chiffres 1 et 0 suffisent pour écrire tous les nombres, ce système entraînerait dans la pratique une excessive longueur, puisque un nombre relativement petit, comme huit, renferme déjà quatre chiffres.

Changement de base.

318. **Un nombre étant écrit dans un système de numération, on peut se proposer de l'écrire dans un autre système.**

Soit, par exemple, le nombre 962638 écrit dans le système décimal, on demande de l'écrire dans le système duodécimal.

962638	12				
26	80219	12			
23	82	6684	12		
118	101	68	557	12	
10	59	84	77	46	12
	11	0	5	10	3

Puisqu'une unité du second ordre est la réunion de douze unités simples, on saura combien le nombre proposé contient d'unités du second ordre, en cherchant combien de fois ce nombre contient douze, c'est-à-dire en le divisant par 12; cette division indique que le nombre proposé contient 80219 unités du second ordre, plus dix unités simples. Puisqu'une unité du troisième ordre est la réunion de douze unités du second

ordre, on divisera de même 80219 par 12; cette division indique que les 80219 unités du second ordre valent 6684 unités du troisième ordre, plus onze du second. En continuant de cette manière, on trouve finalement que le nombre proposé renferme *dix* unités simples, *onze* unités du second ordre, *cinq* du quatrième, *dix* du cinquième, *trois* du sixième : ce nombre s'écrira donc dans le système duodécimal

$$3\alpha 50\beta\alpha.$$

Règle I. *Un nombre étant écrit dans le système décimal, pour l'écrire dans un autre système, on divise par la nouvelle base, d'abord le nombre donné, puis le premier quotient, puis le second quotient, et ainsi de suite; les restes successifs forment les chiffres qui doivent composer le nombre à partir de la droite dans le nouveau système.*

Je résous maintenant la question inverse. Un nombre étant écrit dans un certain système, l'écrire dans le système décimal. Soit, par exemple, le nombre $3\alpha 50\beta\alpha$ écrit dans le système duodécimal; écrire ce nombre dans le système décimal, On a 3 unités du sixième ordre, qui en valent 12×3 ou 36 du cinquième ordre, et qui, ajoutées aux dix unités de cet ordre, donnent 46 unités du cinquième ordre. Ces 46 unités du cinquième ordre valent 12×46 ou 552 unités du quatrième ordre qui, ajoutées aux cinq unités de cet ordre, donnent 557 unités du quatrième ordre. Ces 557 unités du quatrième ordre valent 12×557 ou 6684 du troisième, et 12×6684 ou 80208 du second, qui, ajoutées aux onze unités de cet ordre, donnent 80219 unités du second ordre. Ces 80219 unités du second ordre valent 12×80219 unités simples, qui, ajoutées aux dix unités simples, donnent 982638 unités simples. Telle est l'expression du nombre proposé dans le système décimal. Ainsi :

Règle II. *Un nombre étant écrit dans un certain système, pour l'écrire dans le système décimal, on multiplie par la base le premier chiffre de gauche, on ajoute au produit le second chiffre, on multiplie le résultat par la base, on ajoute le troi-*

sième chiffre, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier chiffre.

Si l'on voulait passer d'un système quelconque à un autre, on se servirait comme intermédiaire du système décimal. Étant donné, par exemple, le nombre 489α écrit dans le système duodécimal; écrire ce nombre dans le système dont la base est 7. En passant du système duodécimal au système décimal, on trouve que le nombre proposé s'écrit 8182 dans le système décimal; en passant actuellement du système décimal au système dont la base est 7, on trouve que le nombre s'écrit 32566 dans le système à base 7. Ainsi :

$$489\alpha \text{ (base 12)} = 8182 \text{ (base 10)} = 32566 \text{ (base 7)}.$$

Addition.

319. L'addition n'offre aucune difficulté; tout dépend de l'addition d'un nombre d'un chiffre; lorsque la somme est supérieure à la base du système de numération, avec un nombre d'unités égal à la base on forme une unité du second ordre. Ainsi, dans le système duodécimal, on dira : 5 et 7 font dix (cinq et sept font douze), 8 et 9 font 15 (huit et neuf font douze cinq), β et α font 19 (onze et dix font douze neuf).

Soit à additionner des nombres quelconques écrits dans le système duodécimal,

$$\begin{array}{r} 2\ \alpha\ \beta\ \beta \\ 1\ 5\ \alpha\ 9 \\ 7\ 8\ \beta\ \alpha \\ \hline 1\ 0\ 1\ \alpha\ 6 \end{array}$$

Je dirai : β et 9..... 18, et α..... 26, je pose 6 et retiens 2, et β..... 11, et α..... 1β, et β..... 2α, je pose α et retiens 2, et α..... 10, et 5..... 15, et 8..... 21, je pose 1 et retiens 2, et 2..... 4, et 1..... 5, et 7..... 10, je pose 10.

Soustraction.

320. Soit à retrancher 29βα de 4α89 dans le système duodécimal.

4 α 8 9
2 9 6 α
―――――
2 0 8 β

On ne peut retrancher α de 9, j'ajoute au nombre supérieur douze unités qui, avec 9 unités, font 19 unités ; de 19 ôtez α, il reste β ; afin que la différence ne change pas, j'ajoute par la pensée une unité du second ordre au nombre inférieur; on ne peut retrancher 10 de 8, j'ajoute au nombre supérieur douze unités du second ordre qui, avec les 8, font 18 unités du second ordre ; de 18 ôtez 10, il reste 8, etc.

Multiplication.

321. Pour opérer la multiplication dans le système duodécimal, il est nécessaire de savoir par cœur les produits des onze premiers nombres multipliés les uns par les autres. Ces produits sont renfermés dans la table suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92
β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	α1

On forme cette table comme la table ordinaire, en ajoutant les nombres de la première ligne horizontale à eux-mêmes, les

ajoutant ensuite à ceux de la seconde ligne, puis à ceux de la troisième, etc.

Soit à multiplier un nombre de plusieurs chiffres 52α9 par un nombre d'un chiffre 7 ;

```
  5 2 α 9
        7
---------
3 0 8 3 3
```

Je dirai : 7 fois 9..... 53, je pose 3 et retiens 5 ; 7 fois α..... 5α et 5 de retenue 63, je pose 3 et retiens 6 ; 7 fois 2...... font 12 et 6 de retenue 18, je pose 8 et retiens 1 ; 7 fois 5.... 2β et 1 de retenue 30, je pose 30.

Après avoir observé qu'on multiplie un nombre par douze, cent, mille....., en ajoutant un, deux, trois..... zéros à la droite du nombre, on traitera facilement le cas général de la multiplication. Soit à multiplier 52α9 par 3β7 ;

```
   52α9
    3β7
-------
  30833
 497α3
13883
-------
1894963
```

Il s'agit de répéter le multiplicande 7 fois, plus β0 fois, plus 300 fois. Je répète d'abord le multiplicande 7 fois ; j'obtiens le produit partiel 30833, que j'écris au-dessous du trait horizontal. Pour répéter le multiplicande β0 fois, il faut le multiplier par β, ce qui donne 497α3, puis mettre un zéro à la droite de ce nombre, ce qui revient à considérer ce nombre comme exprimant des douzaines ; j'écris donc ce second produit partiel de manière que son premier chiffre 3 se trouve placé dans la colonne des douzaines ; je répète le multiplicande 300 fois en multipliant par 3, puis ajoutant deux zéros à la droite du produit, c'est-à-dire en mettant le premier chiffre de ce troisième produit partiel dans la colonne des centaines. L'addition de ces trois produits partiels donne le produit demandé. On retrouve ainsi la règle ordinaire de la multiplication.

Division.

322. Il est inutile de parler de la division ; c'est l'opération inverse de la multiplication, et, comme telle, elle se déduit de cette dernière.

Je fais remarquer que, si l'on sait effectuer la division dans le système duodécimal, on pourra, un nombre étant écrit dans le système duodécimal, le transformer dans un système quelconque, sans passer par le système décimal. Si, par exemple, on veut traduire dans le système à base 7 le nombre 489α écrit dans le système duodécimal, on divisera par 7 le nombre proposé, puis le quotient, puis le second quotient, etc. Les restes successifs seront les chiffres cherchés, à partir de la droite.

489α	7			
9	814	7		
2α	11	11α	7	
6	64	6α	1β	7
	6	5	2	3

Ainsi le nombre proposé s'écrira 32566 dans le système à base 7.

Fractions duodécimales.

323. Si, pour mesurer les grandeurs, on partage l'unité en parties de douze en douze fois plus petites, on obtiendra des fractions duodécimales qui joueront le même rôle que les fractions décimales, et qui, comme elles, s'écriront sous forme de nombres entiers.

Je me propose de convertir en fraction duodécimale la fraction ordinaire $\frac{11}{18}$; cette fraction, dans le système duodécimal, s'écrit $\frac{\beta}{16}$: je divise donc β par 16 en multipliant le dividende par une puissance de douze ;

β0	16
60	0,74
0	

j'obtiens la fraction duodécimale 0,74.

La conversion sera possible, si le dénominateur de la fraction

ordinaire supposée irréductible ne renferme que les facteurs premiers 2 et 3 qui entrent dans la base douze ; et en effet, dans ce cas, le numérateur, multiplié par une puissance convenable de douze, devient divisible exactement par le dénominateur. Mais, si le dénominateur contient des facteurs premiers autres que 2 et 3, la fraction duodécimale se prolonge indéfiniment, et elle est périodique.

La conversion des fractions duodécimales en fractions ordinaires s'opère d'après les mêmes raisonnements que ceux employés dans l'étude des fractions décimales. Une fraction duodécimale périodique simple égale une fraction ordinaire ayant pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre formé d'autant de β qu'il y a de chiffres à la période; une fraction duodécimale périodique mixte égale une fraction ordinaire ayant pour dénominateur un nombre formé d'autant de β qu'il y a de chiffres à la période suivis d'autant de 0 qu'il y a de chiffres irréguliers.

Il en résulte qu'une fraction ordinaire, dont le dénominateur ne renferme que des facteurs premiers autres que 2 et 3, donne naissance à une fraction duodécimale périodique simple; la fraction est périodique mixte, si le dénominateur renferme à la fois les facteurs 2 ou 3 et des facteurs étrangers. Par exemple la fraction $\frac{3}{5}$ donne naissance à une fraction duodécimale périodique simple, la fraction $\frac{7}{\alpha}$ à une fraction périodique mixte.

324. Si l'on compare les différents systèmes de numération, on reconnaît que c'est le système duodécimal qui offre le plus d'avantages. La base dix n'est divisible que par 2 et par 5, tandis que la base douze est divisible par 2, 3, 4, 6. Parmi les fractions ordinaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, quatre seulement peuvent être converties en fractions décimales, tandis que six de ces fractions se convertissent exactement en fractions duodécimales. Ainsi la mesure des grandeurs s'opérerait avec plus de facilité dans le système duodécimal ; il y aurait beaucoup plus de chances d'arriver à une expression simple et exacte de la grandeur.

Les hommes ont adopté la numération décimale dès les premiers âges, sans doute à cause des dix doigts de leurs mains; ils comptaient d'abord sur leurs doigts; arrivés au nombre dix, afin d'aller plus loin, ils ont considéré la dizaine comme une unité nouvelle, pour recommencer à compter sur les doigts, de manière à former une nouvelle dizaine et prolonger ainsi la série des nombres

Cependant la division duodécimale offre tant d'avantages qu'on la retrouve dans presque toutes les anciennes mesures. Ainsi chacune des deux parties du jour a été partagée en douze heures; l'ancienne unité de longueur, le pied, était divisée en douze pouces, le pouce en douze lignes; l'unité de monnaie, le sou, était de même divisé en douze deniers, etc. Dans les usages de la vie commune, on a souvent à prendre la moitié, le tiers, ou le quart d'une quantité; la division duodécimale le permet aisément. Par exemple, la moitié du pied, c'est six pouces; le tiers, quatre pouces; le quart, trois pouces. Avec la division décimale, on peut bien prendre la moitié du mètre, c'est 5 décimètres, mais il est impossible d'en prendre le tiers, et d'ailleurs le quart s'exprime d'une manière compliquée, 25 centimètres.

CHAPITRE II.

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ.

---

325. Les caractères de divisibilité ne sont pas les mêmes dans les différents systèmes de numération.

Dans le système duodécimal, un nombre terminé par un 0, étant multiple de douze, est multiple de chacun des diviseurs de douze, c'est-à-dire de 2, 3, 4, 6. Un nombre quelconque $2\alpha76$ se décomposant en 2 parties, l'une $2\alpha70$, multiple de chacun des diviseurs de douze, l'autre 6 formée du dernier chiffre, on en conclut qu'un nombre est divisible par l'un des diviseurs de la base, si son dernier chiffre est divisible par ce diviseur, et qu'en général le reste est égal au reste donné par ce dernier chiffre. Ainsi le nombre $2\alpha76$ est divisible par 2, par 3, et par 6; divisé par 4, il donne pour reste 2.

Un nombre terminé par deux zéros, étant un multiple de cent ou du carré de la base, est un multiple de chacun des diviseurs de cent, à savoir de 8, 9,.... Un nombre sera donc divisible par l'un de ces diviseurs, si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible. Ainsi le nombre $1\alpha60$ est divisible par 8 et par 9.

326. Je vais indiquer la méthode générale par laquelle on trouve les caractères de divisibilité par un diviseur quelconque. Pour fixer les idées, je raisonne sur le diviseur 7, et je supposerai le nombre écrit dans le système décimal. Je cherche d'abord les restes que fournissent les puissances successives de la base divisées par 7.

1 =	. . . .	1
10 =	multiple de 7	+ 3
100 =	id.	+ 2
1000 =	id.	+ 6
10000 =	id.	+ 4
100000 =	id.	+ 5
1000000 =	id.	+ 1
10000000 =	id.	+ 3
. . . .	. . . . .	. .
. . . .	. . . . .	. .

Le nombre 10 égale 7 plus 3. Le nombre 100 égale 10×10; or, on sait qu'on obtient le reste d'un produit en multipliant le reste du multiplicande par celui du multiplicateur ; le reste de 100 sera donc $3 \times 3 = 9$ ou 2. De même 1000 égale 100×10, le reste de 1000 égale le reste de 100 multiplié par celui de 10, c'est-à-dire $2 \times 3 = 6$. De même le reste de 10000 égale le reste de 1000 multiplié par celui de 10, c'est-à-dire $6 \times 3 = 18$ ou 4. Ainsi :

RÈGLE. *Pour calculer les restes que fournissent les puissances successives d'un nombre divisé par un autre, on multipliera le dernier reste obtenu par le reste de la première puissance, ce qui donnera le reste suivant.*

Les restes étant plus petits que le diviseur, après un nombre d'opérations au plus égal au diviseur, on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, et comme les restes se calculent d'après une règle uniforme, les restes suivants se reproduiront de manière à former une série périodique. Dans l'exemple actuel, à la sixième opération on retrouve le premier reste 1, et la série se compose des six restes 1, 3, 2, 6, 4, 5, qui se reproduisent périodiquement.

Si, pour simplifier, on remplace les restes plus grands que la moitié du diviseur par les restes plus petits que cette moitié, le tableau précédent devient :

1 =	. . . . . .	+ 1
10 =	multiple de 7	+ 3
100 =	id.	+ 2

1000	=	multiple de 7	— 1
10000	=	id.	— 3
100000	=	id.	— 2
1000000	=	id.	+ 1
. . . .			
. . . .			

Soit maintenant un nombre quelconque 53184942629. On le décomposera de la manière suivante.

9	=	. . . . .	9	
20	=	multiple de 7	+ 3 × 2	
600	=	id.	+ 2 × 6	
2000	=	id.	. . . .	— 1 × 2
40000	=	id.	. . . .	— 3 × 4
900000	=	id.	. . . .	— 2 × 9
4000000	=	id.	+ 1 × 4	
80000000	=	id.	+ 3 × 8	
100000000	=	id.	+ 2 × 1	
3000000000	=	id.	. . . .	— 1 × 3
50000000000	=	id.	. . . .	— 3 × 5

Et en effet, puisqu'une unité du second ordre est égale à un multiple de 7 plus 3, deux unités de cet ordre seront égales à deux fois ce multiple de 7 plus deux fois 3; de même, puisqu'une unité du cinquième ordre est égale à un multiple de 7 moins 3, quatre unités de cet ordre seront égales à quatre fois ce multiple de 7 moins quatre fois 3.

Ainsi, *pour trouver le reste de la division par* 7 *d'un nombre écrit dans le système décimal, on le partage en tranches de trois chiffres à partir de la droite, on ajoute au premier chiffre de chaque tranche trois fois le second et deux fois le troisième, on retranche les sommes fournies par les tranches de rang pair de celles fournies par les tranches de rang impair, en augmentant ces dernières de* 7, *si cela est nécessaire.*

Dans le calcul, on retranchera 7 toutes les fois que ce sera possible. En opérant sur le nombre proposé, on voit qu'il est divisible par 7.

327. Remarque I. J'appelle a la base du système de numération, b le diviseur que l'on considère. La méthode consiste à former un tableau des restes fournis par les puissances successives de a divisées par b. Il peut se présenter différentes circonstances qu'il est bon d'étudier.

Et d'abord, si le diviseur ne contient que les facteurs premiers qui entrent dans la base, il est clair qu'on arrivera à une puissance a^m de la base divisible par b ; alors on trouvera le reste 0, et tous les restes suivants seront aussi nuls ; on voit que les m derniers chiffres de droite du nombre proposé concourent seuls à la formation du reste.

Je considère le cas le plus simple, celui où b est un diviseur de la base a ; dans ce cas, le reste de la division d'un nombre par b égale le reste donné par le dernier chiffre ; si ce dernier chiffre est divisible par b, le nombre est divisible par b. C'est ainsi que, dans le système décimal, on a trouvé le caractère de divisibilité par les deux diviseurs 2 et 5 de la base dix ; dans le système duodécimal, par les quatre diviseurs, 2, 3, 4, 6 de la base douze.

328. Remarque II. Lorsque le diviseur égale $a - 1$, la première puissance de la base a donne le reste 1 ; la seconde puissance donne aussi le reste 1 ; tous les restes sont égaux à l'unité. Ainsi : *Un nombre, écrit dans le système de numération dont la base est* a, *est divisible par* a—1, *si la somme de ses chiffres est divisible par* a—1.

Ce caractère s'applique au diviseur 9 dans le système décimal, au diviseur β dans le système duodécimal. Soit, par exemple, le nombre $45\alpha3$ écrit dans le système duodécimal ; pour trouver le reste de la division de ce nombre par β, on dira : 3 et α..... 2, et 5..... 7 et 4..... 0 ; le nombre est divisible par β.

329. Remarque III. Je considère enfin le cas où le diviseur b égale $a+1$, et, pour fixer les idées, je raisonne dans le système duodécimal. Les puissances successives de la base a s'écrivent 1, 10, 100.....; le nombre $b+1$ s'écrit 11. Le nombre 100 est

égal à $\beta\beta+1$; or $\beta\beta$, étant égal au produit $11\times\beta$, est un multiple de 11; donc la seconde puissance de 10 donne le reste 1, et par conséquent les restes 1 et 10 se succèdent alternativement.

$$\begin{array}{rll} 1 = \ldots\ldots & 1 & \\ 10 = \ldots\ldots & 10 & = \text{multiple de } 11 - 1 \\ 100 = \text{multiple de } 11 & + 1 & \\ 1000 = \quad \text{id.} & + 10 & = \quad \text{id.} \quad - 1 \\ 10000 = \quad \text{id.} & + 1 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Ainsi *un nombre, écrit dans le système de numération dont la base est* a, *est divisible par* $a+1$, *quand l'excès de la somme de ses chiffres de rang impair sur celle des chiffres de rang pair est divisible par* $a+1$.

Ce caractère s'applique au diviseur *onze* dans le système décimal et au diviseur *treize* dans le système duodécimal. On reconnaît de cette manière que le nombre $9754\beta\alpha6\alpha$, écrit dans le système duodécimal, est divisible par treize.



CHAPITRE III

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES NOMBRES.

---

330. On appelle *résidu* le reste de la division d'un nombre par un autre. Ainsi 23 divisé par 5 donne le résidu 3.

Lorsque deux nombres, divisés par un même nombre, donnent le même résidu, ces deux nombres sont dits *équivalents* par rapport au diviseur, qui porte alors le nom de *module*. Ainsi les nombres 48 et 23, donnant le même résidu 3 quand on les divise par 5, sont équivalents par rapport au module 5.

On indique l'équivalence de deux nombres par le signe $\equiv$. Ainsi

$$48 \equiv 23 \pmod{5}.$$

On écrit le module entre parenthèses.

Puisque la différence de deux nombres équivalents est divisible par le module, c'est-à-dire donne le résidu 0, on peut écrire aussi

$$48 - 23 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Résidus des multiples.

331. THÉORÈME I. *Les* $m-1$ *premiers multiples d'un nombre* a *premier avec* m *donnent pour résidus par rapport au module* m*, dans un certain ordre, les* $m-1$ *premiers nombres.*

Considérons la série des $m-1$ premiers multiples de a; savoir :

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots\ldots,\ (m-1)\,a,$$

et les résidus qu'ils fournissent quand on les divise par m. Nous

remarquons qu'aucun de ces résidus n'est nul; car si l'un des multiples αa donnait le résidu 0, c'est-à-dire était divisible par m, le nombre m, divisant le produit αa et étant premier avec le facteur a, diviserait l'autre facteur α, ce qui est impossible, puisque α est plus petit que m. Nous remarquons ensuite que deux multiples αa et $\alpha' a$ ne peuvent donner le même résidu; car alors la différence $(\alpha-\alpha')a$ de ces deux multiples donnerait le résidu 0, ce qui est impossible. On obtient ainsi par ces résidus $m-1$ nombres différents qui sont tous inférieurs à m; ces résidus sont donc, dans un certain ordre, les $m-1$ premiers nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots,\ m-1.$$

EXEMPLE. Les huit premiers multiples de 5 donnent, par rapport au module 9, les résidus

$$5,\ \ 1,\ \ 6,\ \ 2,\ \ 7,\ \ 3,\ \ 8,\ \ 4.$$

332. COROLLAIRE I. *Si l'on prolonge indéfiniment la série des multiples, les mêmes résidus se reproduisent dans le même ordre.*

Considérons la série indéfinie des multiples de a; savoir :

$$0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a\ldots\ldots(m-1)a,\ ma,\ (m+1)a,\ (m+2)a,\ldots\ldots$$

On peut déduire chaque résidu du résidu précédent en ajoutant à ce dernier le résidu de a et retranchant m si la somme surpasse m. Les m premiers multiples (en regardant comme premier multiple le produit de a par 0, c'est-à-dire 0) donnent dans un certain ordre les résidus

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1.$$

Le multiple ma, étant divisible par m, donne le premier résidu 0; on recommence donc les mêmes opérations, et l'on retrouve les mêmes résidus dans le même ordre.

Soit αa l'un des multiples. Si l'on ajoute à α un multiple quelconque de m, le résidu ne change pas.

Les deux multiples αa et $(m-\alpha)a$ donnent des résidus complémentaires, c'est-à-dire des résidus dont la somme est m; car la somme de ces deux multiples est divisible par m.

333. Corollaire II. *Les multiples d'un nombre* b, *équivalant à* a *par rapport au module* m, *donnent les mêmes résidus dans le même ordre.*

En effet, puisque le résidu de b est le même que celui de a, les deux séries de résidus sont identiques. On peut donc toujours remplacer le nombre a par son résidu, plus petit que m.

Lorsque le nombre b premier avec m n'est pas équivalent à a, les deux séries diffèrent par l'ordre des résidus.

334. Théorème II. *Si deux nombres* a *et* m *ont un plus grand commun diviseur* d, *les* $\frac{m}{d}-1$ *multiples successifs*

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots,\ \left(\frac{m}{d}-1\right)a,$$

donnent, par rapport au module m, *dans un certain ordre, les résidus*

$$d,\ 2d,\ 3d,\ \ldots\ldots,\ \left(\frac{m}{d}-1\right)d.$$

J'appelle a' et m' les deux quotients, premiers entre eux, que l'on obtient en divisant les deux nombres a et m par leur plus grand commun diviseur d. Soit r le résidu fourni par un multiple quelconque αa,

$$\alpha a = mq + r;$$

puisque a et m sont divisibles par d, le résidu r est aussi divisible, et l'on a

$$\alpha a' = m'q + r',$$

en désignant par r' le quotient $\frac{r}{d}$. Or, d'après le théorème précédent, les multiples de a' donnent, par rapport au module m', les résidus

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m'-1.$$

Donc les multiples de a donnent, par rapport au module m, les résidus

$$d,\ 2d,\ 3d,\ \ldots\ldots\ (m'-1)d.$$

Le multiple suivant $m'a$ donnerait le résidu 0, et on retrouverait ensuite les mêmes résidus dans le même ordre.

Ainsi, dans tous les cas, les résidus des multiples d'un nombre par rapport à un même module forment une série périodique simple.

335. COROLLAIRE. On a souvent à résoudre des équivalences de la forme

$$ax \equiv r \pmod{m}.$$

La question est de trouver les multiples de a qui donnent le résidu r par rapport au module m. On peut toujours supposer le nombre r plus petit que m, sans quoi on le remplacerait par son résidu.

Considérons d'abord le cas où a est premier avec m. La suite des $m-1$ premiers multiples de a donnant pour résidus, dans un certain ordre, les $m-1$ premiers nombres, l'un de ces multiples, par exemple αa, donnera le résidu r, et ensuite de m en m les multiples reproduiront le même résidu. On peut donc donner à x les valeurs

$$\alpha,\ \alpha+m,\ \alpha+2m,\ \alpha+3m,\ \ldots.$$

Toutes ces valeurs sont comprises dans la formule

$$x=\alpha+my,$$

dans laquelle y désigne un nombre entier quelconque, ou plus simplement

$$x\equiv\alpha \pmod{m}.$$

Soit, par exemple, à résoudre l'équivalence

$$5x\equiv 8 \pmod{9}.$$

On cherche parmi les huit premiers multiples de 5 celui qui donne le résidu 8 : c'est 5×7; on a donc

$$x=7+9y,$$

ou

$$x\equiv 7 \pmod{9}.$$

Lorsque les deux nombres a et m ont un plus grand commun diviseur d, il est nécessaire que le résidu r soit aussi divisible par d, sans quoi l'équivalence serait impossible. Si donc on

appelle a', m', r' les quotients que l'on obtient en divisant par d les nombres a, m, r, l'équivalence proposée est ramenée à la suivante :

$$a'x \equiv r' \pmod{m'},$$

dans laquelle a' et m' sont premiers entre eux.

336. *Trouver combien il y a de nombres inférieurs et premiers à* m.

Il résulte des théorèmes précédents que, si l'on considère les $m-1$ premiers nombres comme les résidus des multiples d'un même nombre par rapport au module m, il y a autant de manières de les obtenir, c'est-à-dire il y a autant d'ordres ou de dispositions différentes, qu'il y a de nombres plus petits que m et premiers avec lui. Nous sommes ainsi amenés à chercher combien il y a de nombres inférieurs et premiers à m.

Supposons le nombre m décomposé en facteurs premiers, et soit

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}.$$

Imaginons écrite la série des m premiers nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots\ldots\ldots\ m.$$

Si l'on en retranche les nombres qui contiennent l'un des facteurs premiers a, b, c, d, ou plusieurs d'entre eux, il restera les nombres premiers avec m.

Mettons d'abord à part les nombres qui contiennent le facteur a, c'est-à-dire les multiples de a,

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{m}{a}a.$$

Ces multiples sont au nombre de $\frac{m}{a}$. De même les multiples de b sont au nombre de $\frac{m}{b}$, les multiples de ab au nombre de $\frac{m}{ab}$, etc. Si de la série des m premiers nombres on retranche les multiples de a qu'elle renferme, la série des nombres res-

tants contiendra $m-\frac{m}{a}$, ou $m\left(1-\frac{1}{a}\right)$ nombres. Pour abréger nous poserons

$$m'=m\left(1-\frac{1}{a}\right);$$

nous désignerons par (m) la série des m premiers nombres, par $\left(\frac{m}{a}\right)$ la série des multiples de a, et par (m') la série qui reste quand on retranche la seconde de la première.

Cherchons maintenant combien dans la série (m') il y a de multiples de b. Ces multiples sont ceux que contient la série (m), moins ceux que contient la série $\left(\frac{m}{a}\right)$. Le nombre des premiers est $\frac{m}{b}$. Puisque a et b sont premiers entre eux, les multiples de b contenus dans la série $\left(\frac{m}{a}\right)$, étant en même temps multiples de a, sont multiples de ab; ce sont donc les multiples de ab contenus dans la série (m); leur nombre est $\frac{m}{ab}$. Ainsi le nombre des multiples de b contenus dans la série (m') est

$$\frac{m}{b}-\frac{m}{ab}=\frac{m-\frac{m}{a}}{b}=\frac{m'}{b}.$$

De même le nombre des multiples de c contenus dans la série (m') est $\frac{m'}{c}$, le nombre des multiples de bc est $\frac{m'}{bc}$, etc. On voit par là que la série (m') jouit des mêmes propriétés que la série (m).

Si de la série (m') on retranche les multiples de b qu'elle contient, la série des nombres restants renferme $m'-\frac{m'}{b}$ ou $m'\left(1-\frac{1}{b}\right)$ nombres. Pour abréger, nous poserons

$$m''=m'\left(1-\frac{1}{b}\right);$$

nous désignerons par $\left(\frac{m'}{b}\right)$ la série des multiples de b que renferme la série (m'), et par (m'') la série des nombres restants.

Le même raisonnement peut être continué indéfiniment. Cherchons combien dans la série (m'') il y a de multiples de c; ces multiples sont ceux que contient la série (m'), et qui sont au nombre de $\frac{m'}{c}$, moins ceux que contient la série $\frac{m'}{b}$; les nombres c et b étant premiers entre eux, ces derniers sont les multiples de bc contenus dans la série (m'), au nombre de $\frac{m'}{bc}$. Le nombre des multiples de c contenus dans la série (m'') est donc

$$\frac{m'}{c}-\frac{m'}{bc}=\frac{m'-\frac{m'}{b}}{c}=\frac{m''}{c}.$$

Ainsi la série (m'') jouit des mêmes propriétés que la série (m'), ou que la série (m). Si de cette série (m'') on retranche les multiples de c qu'elle contient, la série restante contiendra $m''-\frac{m''}{c}=m''\left(1-\frac{1}{c}\right)$ nombres. Ces derniers nombres sont premiers avec m. En remplaçant m'', puis m' par leurs valeurs, et désignant par n le nombre des nombres inférieurs et premiers à m, on obtient la formule

$$n=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

ou

$$n=a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1}\,(a-1)(b-1)(c-1).$$

Par exemple, si $m=12=2^2\times 3$, on a $n=2(2-1)(3-1)=4$. Les quatre nombres inférieurs et premiers à 12 sont

1, 5, 7, 11.

Il en résulte les quatre dispositions suivantes des 11 premiers nombres :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
5,	10,	3,	8,	1,	6,	11,	4,	9,	2,	7
7,	2,	9,	4,	11,	6,	1,	8,	3,	10,	5
11,	10,	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

337. Remarque. Si a est un nombre inférieur et premier à m, $m-a$ est aussi premier avec m; ainsi les nombres inférieurs et premiers à m se correspondent deux à deux, et leur nombre est pair. Les dispositions correspondantes des $m-1$ premiers nombres sont inverses l'une de l'autre.

Il y a exception pour $m=2$; dans ce cas $m=1$.

338. Corollaire I. Soient m et m' deux nombres premiers entre eux. Désignons par n le nombre des nombres inférieurs et premiers à m, et par n' le nombre des nombres inférieurs et premiers à m'. Supposons m et m' décomposés en facteurs premiers, et soient

$$m = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma},$$

$$m' = a'^{\alpha'}\, b'^{\beta'};$$

on a

$$n = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

$$n' = m'\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right).$$

Les facteurs premiers a', b' étant différents de a, b, c, le nombre des nombres inférieurs et premiers au produit

$$mm' = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, a'^{\alpha'}\, b'^{\beta'}$$

est

$$mm'\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right) = nn'.$$

Par exemple, si $m=3$, $m'=5$, on a $n=2$, $n'=4$. Le nombre des nombres inférieurs et premiers à 3×5 ou 15 est 2×4 c'est-à-dire 8.

339. Corollaire II. Supposons la circonférence divisée en m parties égales, et plaçons sur les points de division les numéros

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m-1.$$

Si l'on prend pour unité l'une des divisions, la circonférence

vaut m unités. Quand, partant du point 0, on parcourt dans le même sens les arcs

$$a,\quad 2a,\quad 3a\ldots\ldots,\ (m-1)a,$$

les numéros auxquels on arrive sont précisément les résidus de ces multiples par rapport au module m; car un multiple quelconque égale un certain nombre de circonférences, c'est-à-dire un certain nombre de fois m, plus le numéro auquel on arrive.

Quand a est premier avec m, les multiples de a donnent pour résidus les $m-1$ premiers nombres, et l'on passe par tous les points avant de revenir au point de départ. Le multiple ma ramène au point de départ 0. En continuant, on repasse par les mêmes points que précédemment. On obtient ainsi un polygone régulier de m côtés.

Mais si a et m ont un plus grand commun diviseur d, on ne passe que par les numéros multiples de d, et l'on forme un polygone régulier de $\frac{m}{d}$ côtés.

Les multiples de a et de $m-a$ donnent le même polygone en ordre inverse; il en résulte que le nombre des polygones réguliers de m côtés est égal à la moitié du nombre des nombres inférieurs et premiers à m.

(Voyez, pour plus de détails, mes *Éléments de géométrie*, 4e édition.)

Résidus des puissances.

340. Théorème III. *Soit* p *un nombre premier,* a *un nombre quelconque non divisible par* p, *le nombre* a^{p-1} *est équivalent à l'unité par rapport au module* p.

En effet, on sait que le produit de plusieurs nombres équivaut au produit des résidus de ces différents nombres (n° 69); les multiples

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots\ldots,\ (p-1)a$$

donnent, par rapport au module p, les résidus

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots\ldots,\ p-1;$$

Le produit de tous ces multiples équivaut au produit de tous les résidus. On a donc

$$1.2.3\ldots(p-1).a^{p-1} \equiv 1.2.3\ldots(p-1)\ [\text{mod } p],$$

ou

$$1.2.3\ldots(p-1).\ [a^{p-1}-1] \equiv 0\ (\text{mod } p).$$

Le nombre premier p, divisant le premier membre, qui est un produit, divise l'un des facteurs; or il ne divise aucun des facteurs $1, 2, 3\ldots, p-1$, qui sont plus petits que p; donc il divise l'autre facteur $a^{p-1}-1$. Ainsi

$$a^{p-1}-1 \equiv 0\ (\text{mod } p),$$

ou

$$a^{p-1} \equiv 1\ (\text{mod } p).$$

Ce théorème remarquable est dû à FERMAT.

341. THÉORÈME IV. *Si* m *est premier avec* a, *et si* n *désigne le nombre des nombres inférieurs et premiers à* m, *le nombre* a^n *est équivalent à l'unité par rapport au module* m.

Soient

$$1, r, r', r'', \ldots\ldots m-1$$

les nombres inférieurs et premiers à m, α l'un quelconque d'entre eux; le résidu de αa est aussi premier avec m; donc les multiples

$$a, ra, r'a, r''a, \ldots\ldots (m-1)a$$

donnent, par rapport au module m, dans un certain ordre, les résidus

$$1, r, r' r'', \ldots\ldots m-1.$$

Puisque le produit des multiples équivaut au produit des résidus, on a

$$1.r.r'.r''\ldots(m-1).a^n \equiv 1.r.r'.r''.(m-1)\ (\text{mod } m),$$

ou

$$1.r.r'.r''\ldots(m-1)\ [a^n-1] \equiv 0\ (\text{mod } m).$$

Le nombre m, divisant le premier membre et étant premier avec chacun des facteurs $1, r, r', r'', \ldots\ldots (m-1)$, divise l'autre facteur a^n-1; donc

$$a^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

Cette extension du théorème de *Fermat* a été donnée par *Euler*.

342. Corollaire I. Si l'on divise par m les puissances successives

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ldots\ldots$$

d'un nombre a premier avec m, les résidus forment une série périodique simple. Car on calcule chaque résidu en multipliant le résidu précédent par le résidu de a; la première puissance a^0 donne le résidu 1, la puissance a^n donne aussi le résidu 1; donc tous les résidus, à partir du premier, se reproduisent dans le même ordre.

De a^0 à a^{n-1} inclusivement, il y a un nombre entier de périodes, puisque a^n commence une période; donc le nombre des termes de la période est n ou un sous-multiple de n.

343. Corollaire II. Pour convertir la fraction $\frac{1}{m}$ en fraction décimale, on divise par m les puissances successives de la base 10. Quand m est premier avec 10, la série des résidus étant périodique simple, la fraction décimale est évidemment périodique simple. Le nombre des chiffres de la période est n ou un sous-multiple de n.

Par exemple, si l'on convertit en décimales la fraction $\frac{1}{21}$, on trouve

$$\frac{1}{21} = 0{,}047619\ 04\ \ldots\ldots$$

Le nombre n est ici égal à 12, et le nombre des chiffres de la période est la moitié de 12.

Racines primitives.

344. Lorsque deux nombres a et b sont équivalents par rapport au module m, deux puissances semblables a^k, b^k donnent le même résidu; on peut donc, dans l'étude des résidus des puissances, supposer a plus petit que le module. Quand le module p est premier, on sait que la puissance a^{p-1} donne le résidu 1; si cette puissance de a est la première qui, après a^0, donne le résidu 1, les résidus des puissances

$$a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^{p-2}$$

forment une seule période composée de $p-1$ nombres différents; ce sont par conséquent les $p-1$ premiers nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots p-1$$

dans un certain ordre.

Tout nombre a plus petit que le nombre premier p, et tel que a^{p-1} soit la plus petite puissance, abstraction faite de a^0, qui donne le résidu 1 par rapport à p, s'appelle une *racine primitive* du nombre premier p. Chaque racine primitive d'un nombre premier p dispose les $p-1$ premiers nombres dans un ordre particulier par les résidus de ses puissances.

Par exemple, le nombre premier 7 a deux racines primitives 3 et 5; il en résulte les deux dispositions suivantes des six premiers nombres.

Racine 3	Puissances	3^0,	3^1,	3^2,	3^3,	3^4,	3^5,	3^6,
	Résidus	1,	3,	2,	6,	4,	5,	1,
Racine 5	Puissances	5^0,	5^1,	5^2,	5^3,	5^4,	5^5,	5^6,
	Résidus	1,	5,	4,	6,	2,	3,	1,

Ces deux dispositions sont inverses l'une de l'autre,

345. On démontre que tout nombre premier p admet au moins une racine primitive. Dès qu'on sait qu'il existe une racine primitive, on trouve aisément combien il y en a en tout.

Soit a une racine primitive du nombre premier p. Considérons la suite des puissances

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ldots,\ a^{p-2}.$$

Désignons par r un nombre inférieur et premier à $p-1$; je dis que a^r, ou son résidu par rapport à p, est aussi une racine primitive. En effet, les puissances successives de ce nombre sont

$$(a^r)^0,\quad (a^r)^1,\quad (a^r)^2,\quad (a^r)^3,\ \ldots\ldots,\ (a^r)^{p-2},$$

ou

$$a^0,\quad a^r,\quad a^{2r},\quad a^{3r},\ \ldots\ldots,\ a^{(p-2)r}.$$

On peut négliger le multiple de $p-1$ contenu dans chaque exposant, puisque $a^{p-1} \equiv 1$, et remplacer cet exposant par son résidu relativement à $p-1$; mais on sait que les multiples du nombre r premier à $p-1$ donnent pour résidus, par rapport à $p-1$, les $p-2$ premiers nombres (n° 331); on retrouve ainsi dans un certain ordre la série proposée

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ldots\ldots,\ a^{p-2}.$$

Si le nombre r n'était pas premier à $p-1$, on ne reproduirait qu'une partie de ces nombres. On conclut de là que *le nombre des racines primitives d'un nombre premier* p *est égal au nombre des nombres inférieurs et premiers à* p — 1.

346. Nous avons vu (n° 337) que les multiples successifs des deux nombres r et $(p-1)-r$, inférieurs et premiers à $p-1$, donnent, par rapport à $p-1$, des résidus disposés en ordre inverse; les deux racines primitives correspondantes a^r et a^{p-1-r} fourniront donc, par les résidus de leurs puissances successives, des dispositions inverses.

Le tableau suivant renferme les racines primitives des nombres premiers jusqu'à 17.

Nombres premiers.	Racines primitives.
3	2
5	2, 3
7	3, 5
11	2, 6, 7, 8
13	2, 6, 7, 11
17	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14.

347. Théorème V. *Si* p *est un nombre premier, le produit des* p—1 *premiers nombres donne le résidu* —1 *par rapport au module* p, *c'est-à-dire que l'on a*

$$1.2.3.\ldots.(p-1)\equiv -1 \pmod p.$$

En effet, soit a l'un quelconque des $p-1$ premiers nombres, nous avons vu (n° 335) qu'il existe un nombre b plus petit que p vérifiant l'équivalence

$$ax\equiv 1 \pmod p,$$

et qu'il n'en existe qu'un; on peut donc grouper les $p-1$ premiers nombres deux à deux, de manière que le produit ab de deux nombres correspondants a et b donne le résidu 1. Nous remarquons en outre que les deux nombres diffèrent; car si l'on avait $a=b$, le nombre a vérifierait l'équivalence

$$x^2\equiv 1 \quad \text{ou} \quad x^2-1\equiv 0, \quad \text{ou} \quad (x-1)(x+1)\equiv 0,$$

le nombre premier p, divisant le produit des deux facteurs $x-1$ et $x+1$, devrait diviser l'un d'eux, ce qui exige que l'on ait $x=1$ ou $x=p-1$. Il n'y a donc exception que pour le seul groupe $1(p-1)$, qui donne le résidu $p-1$. On en conclut que le produit proposé donne le résidu $p-1$, ou plus simplement -1.

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Wilson. On peut le généraliser de la manière suivante :

348. Théorème VI. *Si l'on désigne par*

$$1, a, b, c, \ldots\ldots m-1$$

les nombres inférieurs et premiers à m, *on a*

$$[1.a.b.c.\ \ldots..\ (m-1)]^2\equiv 1 \pmod{m}.$$

A tout nombre a inférieur et premier à m correspond un nombre b inférieur à m et vérifiant l'équivalence

$$ax\equiv 1 \pmod m;$$

et il n'en correspond qu'un. Ce nombre b est aussi premier à m; car si b et m avaient un facteur commun autre que l'unité, ce facteur, divisant la différence $ab-1$ et le terme ab, diviserait 1,

ce qui est impossible. Le nombre m n'étant pas premier, le facteur a peut se correspondre à lui-même et vérifier l'équivalence $x^2 \equiv 1$; mais comme il entre deux fois dans le carré, le facteur a^2 donnera encore le résidu 1. Quant au groupe 1 $(p-1)$, qui donne le résidu -1, son carré donnera le résidu $+1$. Ainsi le théorème est démontré.

CHAPITRE IV.

OPÉRATIONS ABRÉGÉES.

---

349. Quand on a à effectuer des opérations sur des nombres décimaux, et qu'on demande le résultat avec une certaine approximation, il est possible en général d'abréger beaucoup les calculs. On conçoit, en effet, que l'on puisse dans le courant du calcul négliger les chiffres qui n'ont pas d'influence sur la partie du résultat que l'on veut conserver. Nous allons expliquer des procédés très-simples pour abréger de la sorte les opérations de l'arithmétique. Commençons par la multiplication.

Multiplication.

350. On demande, par exemple, à moins d'une unité près, le produit des deux nombres décimaux 628,45637 et 32,935784. Si l'on effectuait la multiplication d'après le procédé ordinaire, on aurait le produit avec onze décimales que l'on négligerait ensuite, puisqu'il suffit d'avoir le produit à moins d'unité près. Voici un procédé connu sous le nom de *règle d'Oughtred*, qui abrége l'opération et qui dispense de calculer la partie que l'on doit négliger au produit.

RÈGLE. *Pour calculer le produit de deux nombres décimaux, à moins d'une unité près, on écrit au-dessous du multiplicande les chiffres du multiplicateur dans un ordre inverse, en plaçant le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre des centièmes du multiplicande; puis on multiplie par chaque chiffre du multiplicateur la partie du multiplicande qui, en allant de*

droite à gauche, commence au chiffre du multiplicande placé au-dessus du chiffre du multiplicateur que l'on considère, et l'on écrit les produits partiels les uns au-dessous des autres, en mettant les premiers chiffres de droite dans une même colonne verticale. On fait ensuite l'addition; on supprime deux chiffres décimaux par une virgule, et on augmente la partie entière d'une unité.

```
   628,45637
  48753923
 ------------
  1885368
   125690
    56556
     1884
      310
       42
 ------------
   20698,50
```

On multiplie d'abord la partie 628,456 du multiplicande par le chiffre des dizaines 3 du multiplicateur, ce qui donne le produit partiel 18853,68. Puis on multiplie la partie 628,45 du multiplicande par le chiffre des unités 2 du multiplicateur, ce qui donne le produit partiel 1256,90. On multiplie ensuite la partie 628,4 par le chiffre des dixièmes 9 du multiplicateur, ce qui donne le produit partiel 565,56. Continuant de cette manière, on multiplie la partie 628 unités du multiplicande par le chiffre des centièmes 3 du multiplicateur, puis la partie 62 dizaines du multiplicande par le chiffre des millièmes 5 du multiplicateur, et enfin la partie 6 centaines du multiplicande par le chiffre des dix-millièmes 7 du multiplicateur. On voit que les premiers chiffres des produits partiels ainsi obtenus, exprimant tous des centièmes, doivent être placés dans une même colonne verticale.

Évaluons maintenant l'erreur commise. Dans le premier produit partiel on a négligé le produit de la partie de droite 0,00037 du multiplicande par 30; cette partie étant moindre que 0,001, la quantité négligée au produit est moindre que

0,001 × 30, c'est-à-dire moindre que 3 centièmes. Dans le second produit partiel, on a négligé le produit de la partie de droite 0,00637 par 2; cette partie étant moindre que 0,01, la quantité négligée au produit est moindre que 2 centièmes. Dans le troisième produit partiel, on a négligé le produit de la partie de droite 0,05637 par 0,9; cette partie étant moindre que 0,1, la quantité négligée au produit est moindre que 9 centièmes; et ainsi de suite; l'erreur commise sur chaque produit partiel est plus petite qu'un nombre de centièmes marqué par le chiffre correspondant du multiplicateur. On a négligé enfin le produit de tout le multiplicande par les chiffres 8 et 4 du multiplicateur; le multiplicande étant moindre que 1000, et la partie 0,000084 négligée dans le multiplicateur étant moindre que 0,00009, l'erreur commise est plus petite que 9 centièmes. Ainsi, l'erreur totale, ou la somme des quantités négligées au produit, est moindre que 3+2+9+3+5+7+(8+1) centièmes; en général, *l'erreur est moindre qu'un nombre de centièmes marqué par la somme des chiffres du multiplicateur qui fournissent des produits partiels, plus le chiffre suivant augmenté d'une unité.*

Dans l'exemple actuel, l'erreur commise est moindre que 38 centièmes. Le produit obtenu est trop faible; la quantité négligée étant moindre que 0,38, le produit exact est compris entre 20698,50 et 20698,88. On prendra la valeur approchée 20699 par excès à moins d'une demi-unité près.

351. Il est bon de remarquer que si l'on change l'ordre des facteurs, on obtient le même résultat.

```
   32,935784
  73654826
 -----------
  1976142
     65870
    26344
     1316
      160
       18
 -----------
  20698,50
```

Dans la première opération on a multiplié par les 3 dizaines du multiplicateur la partie 628,456 du multiplicande; dans la seconde opération, ces 3 dizaines, placées au multiplicande, ont été multipliées par la même partie 628,456 placée au multiplicateur et retournée. Dans la première opération, on a multiplié par les 2 unités du multiplicateur la partie 628,45 du multiplicande; dans la seconde opération, ces deux unités, placées au multiplicande, ont été multipliées par la même partie 628,45 placée au multiplicateur et retournée, et ainsi de suite. Les deux opérations donnent donc le même résultat 20698,50. Mais l'évaluation de l'erreur diffère : dans le premier cas, nous avons dit que l'erreur est moindre que 38 centièmes ; dans le second cas, nous dirons qu'elle est moindre que 35 centièmes. De ces deux évaluations de l'erreur, on prendra la moins élevée.

352. Proposons-nous encore de calculer le produit des deux nombres 783,25673 et 43,856702, à moins d'une unité.

```
    7 8 3,2 5 6 7 3
  2 0 7 6 5 8 3 4
-------------------
   3 1 3 3 0 2 4
     2 3 4 9 7 5
       6 2 6 5 6
         3 9 1 5
           4 6 8
             4 9
   -------------
   3 4 3 5 0,8 7
```

La quantité négligée au produit est moindre que 4+3+8+5+6+7+1 centièmes, c'est-à-dire moindre que 34 centièmes. Le produit exact est donc compris entre 34350,87 et 34351,21. On prendra la valeur approchée 34351 à moins d'une demi-unité, dans un sens ou dans l'autre.

353. Le procédé que nous venons d'expliquer suffit dans la plupart des cas; on peut l'appliquer toutes les fois que la

somme des chiffres du multiplicateur dont on a à tenir compte ne surpasse pas 100. Car alors la quantité négligée au produit est plus petite que 100 centièmes ou que 1 unité. Si l'on appelle *a* la partie entière du produit calculé, augmentée d'une unité; pour avoir le produit exact, il faut de *a* retrancher une première fraction moindre que l'unité, et en ajouter une seconde aussi moindre que l'unité; en prenant *a* pour valeur approchée du produit, on voit que l'erreur commise est moindre qu'une unité, dans un sens ou dans l'autre.

Si la somme des chiffres du multiplicateur était plus grande que 100, mais plus petite que 1000, il faudrait, après avoir retourné le multiplicateur, placer le chiffre des unités sous le chiffre des millièmes du multiplicande.

Lorsqu'on demande le produit, non plus à moins d'une unité près, mais à moins d'un millième, par exemple, il suffit de transporter la virgule après les millièmes dans le multiplicande; puis de calculer le nouveau produit à moins d'une unité.

Division.

354. On abrégera l'opération de la manière suivante.

RÈGLE. *Après avoir déterminé le nombre* n *des chiffres exacts que l'on veut au quotient, on prendra sur la gauche du diviseur proposé assez de chiffres pour former un nombre au moins égal à* n; *à la suite, on prendra encore* n *chiffres, et l'on aura ainsi le premier diviseur, ou diviseur d'entrée. On prendra ensuite sur la gauche du dividende proposé assez de chiffres pour former un nombre au moins égal au diviseur d'entrée, et l'on aura ainsi le premier dividende partiel. On divisera le premier dividende partiel par le premier diviseur, ce qui donnera le premier chiffre du quotient, et l'on retranchera le produit de ce diviseur par le chiffre ainsi trouvé. Supprimant un chiffre à la droite du premier diviseur, on aura le second diviseur; on divisera le reste par le second diviseur, ce qui donnera le second*

chiffre du quotient, et l'on continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les chiffres du quotient.

Les exemples suivants feront bien comprendre ce procédé de calcul. Considérons d'abord le cas où le premier chiffre à gauche du diviseur est égal ou supérieur au nombre des chiffres du quotient, et mettons la virgule dans le diviseur après ce premier chiffre. Proposons-nous de calculer, à moins d'une unité près, le quotient de 283514,762 par 7,5438621. On voit immédiatement que le quotient renfermera 5 chiffres à sa partie entière; ici $n=5$. Le premier chiffre 7 à la gauche du diviseur étant plus grand que 5, à la suite on prendra 5 chiffres pour former le diviseur d'entrée 754386. Le premier dividende partiel, devant contenir ce diviseur, sera 2835147.

2 8 3 5 1 4,7.6 2	7,5 4 3 8 6.2 1
5 7 1 9 8 9	3 7 5 8 2
4 3 9 2 3	
6 2 0 8	
1 7 6	
2,6	

En divisant le premier dividende partiel par le premier diviseur, on obtient le premier chiffre 3 du quotient et un reste 571989. Au lieu d'abaisser à la droite du reste le chiffre suivant du dividende, on barre le premier chiffre 6 à la droite du diviseur d'entrée, et on divise ce reste par le second diviseur 75438, ce qui donne le second chiffre 7 du quotient. Barrant un second chiffre 8 à la droite du diviseur, on divise le reste 43923 par le troisième diviseur 7543, ce qui donne le troisième chiffre 5 du quotient. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on ait trouvé les cinq chiffres du quotient.

Évaluons maintenant l'erreur commise. En multipliant le diviseur par chacun des chiffres du quotient, nous avons négligé un ou plusieurs chiffres à la droite du diviseur, ce qui occasionne une erreur sur le produit partiel. On a effectué le produit comme dans la multiplication abrégée, quand on écrit le quotient sous le diviseur en ordre inverse, plaçant le chiffre des unités 2 sous le chiffre des dixièmes 5.

7,5 4 3 8 6 2 1
2 8 5 7 3

On a multiplié en effet le premier diviseur, ou diviseur d'entrée 7,54386, par le premier chiffre 3 du quotient, puis le second diviseur 7,5438 par le second chiffre 7 du quotient, et ainsi de suite. D'après le raisonnement que nous avons fait, la quantité négligée au produit est moindre que (3+7+5+8+2), ou que 25 dixièmes. Appelons a le dividende proposé, b le diviseur, q le quotient trouvé 37582, c la quantité négligée dans le produit $b\times q$. En retranchant du dividende le produit inexact $bq-c$, nous avons obtenu un reste 2,662 que nous désignons par r. Si l'on écrit que le dividende est égal au produit inexact $bq-c$ plus le reste, on a

$$a=bq-c+r;$$

d'où l'on déduit, en divisant par b,

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}-\frac{c}{b}.$$

Ainsi, pour avoir le quotient exact $\frac{a}{b}$, il faut au nombre entier q ajouter une première fraction $\frac{r}{b}$ et en retrancher une seconde $\frac{c}{b}$. Le reste r étant plus petit que le dernier diviseur 7,5, il est clair que la première fraction $\frac{r}{b}$ ou $\frac{2,662}{7,54..}$ est plus petite que l'unité. La quantité négligée c dans le produit étant plus petite que 25 dixièmes, la seconde fraction est moindre que $\frac{2,5}{7,5}$. On prendra donc pour valeur approchée du quotient le nombre entier 37582 par défaut, à moins d'une demi-unité près.

355. Considérons maintenant le cas où le nombre formé par les deux premiers chiffres de gauche du diviseur est égal ou supérieur au nombre des chiffres du quotient. Soit par exemple à calculer à moins d'une unité près le quotient de

479205,439 par 10,254328. Le quotient aura 5 chiffres à sa partie entière; ici $n=5$. Le nombre 10, formé par les deux premiers chiffres du diviseur, est plus grand que 5; à la suite prenons encore 5 chiffres pour former le diviseur d'entrée 10,25432 :

4 7 9 2 0 5,4.3 9	1 0,2 5 4 3 2.8
6 9 0 3 2 6	4 6 7 3 2
7 5 0 6 8	
3 2 9 0	
2 1 5	
1 1	

La quantité négligée dans le produit abrégé est plus petite que $(2+3+7+6+4)$ ou que 22 dixièmes. Pour avoir le quotient exact, il faut au nombre entier 46732 ajouter la fraction $\frac{1,139}{10,25...}$, et en retrancher une fraction moindre que $\frac{2,2}{10,25...}$. Ce nombre entier est donc approché à moins d'une demi-unité près, par défaut ou par excès.

On continuera de cette manière indéfiniment.

En général, chacun des chiffres du quotient étant moindre que 10, la somme des chiffres du quotient est plus petite que $10n$, et par conséquent la quantité c, négligée au produit, est plus petite que $10n$ dixièmes ou que n unités; d'autre part, la partie entière du diviseur étant égale ou supérieure à n, le diviseur b est plus grand que n; la fraction $\frac{c}{b}$ sera donc plus petite que $\frac{n}{n}$ ou que l'unité. Le nombre entier obtenu exprime donc le quotient à moins d'une unité près, par défaut ou par excès.

356. Lorsqu'on veut trouver à moins d'une unité près la racine d'un nombre très-grand, il est possible d'abréger un peu l'opération. *Lorsqu'on a calculé plus de la moitié des chiffres de la racine, ou seulement la moitié quand le premier chiffre de la racine est égal ou supérieur à 5, on obtient tous les autres en divisant le reste par le double de la partie déjà trouvée à la racine.*

On demande par exemple la racine du nombre 67952837 à moins d'une unité près.

```
67.95.28.37   | 8243
 39.5         |------
              | 162
  7128 | 164
   568 |-----
       | 43,4
    76
```

Il y a quatre chiffres à la racine, le premier est plus grand que 5 : je détermine d'abord les deux premiers chiffres 82 par le procédé ordinaire; puis je divise le reste 712837 par le double 16400 de la partie déjà trouvée à la racine, plus simplement je divise 7128 par 164; si j'écris la partie entière 43 du quotient à la droite de 82, j'ai la racine demandée à moins d'une unité près.

En effet, j'appelle A le nombre donné, a la partie 8200 déjà trouvée à la racine, R le reste 712837, que l'on obtient en retranchant du nombre donné A le carré a^2 de la partie déjà trouvée à la racine; je désigne enfin par x la seconde partie de la racine. Le carré du nombre fractionnaire $a+x$ renfermant trois parties

$$a^2+2a\times x+x^2,$$

on a

$$a^2+2a\times x+x^2=\mathrm{A}.$$

Si l'on retranche de part et d'autre la première partie a^2, il vient

$$2a\times x+x^2=\mathrm{A}-a^2=\mathrm{R},$$

et, si l'on retranche x^2 de part et d'autre,

$$2a\times x=\mathrm{R}-x^2,$$

puis si l'on divise par $2a$,

$$x=\frac{\mathrm{R}}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Le numérateur x^2 est plus petit que 100^2 et par conséquent plus petit que 10000; puisque a désigne un nombre de quatre chiffres dont le premier est égal ou supérieur à 5, le

dénominateur $2a$ est plus grand que 10000; pour ces deux raisons, la fraction $\frac{x^2}{2a}$ est plus petite que $\frac{10000}{10000}$, c'est-à-dire plus petite que l'unité. Si donc on néglige cette fraction, le quotient complet $\frac{R}{2a}$ donnera x par excès à moins d'une unité près. En prenant seulement la partie entière du quotient, on aura la racine à moins d'une unité près, par défaut ou par excès.

Dans chaque exemple, on peut évaluer l'erreur avec plus de précision. Dans l'exemple actuel, x étant plus petit que 50, $2a$ plus grand que 16000, l'erreur $\frac{x^2}{2a}$ est plus petite que $\frac{2500}{16000}$, soit plus petite que 0,2; le quotient complet est compris entre 43,4 et 43,5; pour avoir x exactement, il faudrait retrancher de ce quotient une quantité plus petite que 0,2; donc la racine cherchée égale 8243 par défaut à moins d'une demi-unité près.

357. Soit encore à calculer la racine du nombre 255896734 à moins d'une demi-unïté près.

```
2.5 5.8 9.6 7.3 4   | 1 5 9 9 7
1 5.5               |-----------
  3 0 8.9           | 2 5 | 3 0 9
    3 0 8 6 7 | 3 1 8
      2 2 4 7 | 9 7,0
          2 1
```

Il y a cinq chiffres à la racine, je calcule les trois premiers chiffres 159 par le procédé ordinaire, puis je divise le reste 3086734 par le double 31800 de la partie déjà trouvée à la racine; plus simplement je divise 30867 par 318, et j'écris à la droite de 159 la partie entière 97 du quotient. L'erreur $\frac{x^2}{2a}$ est plus petite que $\frac{100^2}{30000}$ ou que $\frac{1}{3}$; puisque du quotient complet 97,0... il faut retrancher une quantité plus petite que 0,4, il

en résulte que la racine cherchée égale 15997, à moins d'une demi-unité près.

Pour former le dividende 30867, il suffit d'abaisser à la droite du reste 308 deux chiffres, autant que la partie encore inconnue de la racine en contient.

Racine cubique.

358. Il est possible d'abréger l'extraction de la racine cubique, comme on a abrégé l'extraction de la racine carrée : *lorsqu'on a trouvé plus de la moitié des chiffres de la racine, on obtient tous les autres par une division.* On demande, par exemple, la racine cubique du nombre 15878024319870 à moins d'une unité près.

```
15.878.024.319.870 | 25134
  78.78            |--------
   25 30.24        | 12   1875
     6477331 | 189003
      807241 |--------
       51229 | 34,2
```

Il y a cinq chiffres à la racine; je détermine d'abord les trois premiers 251 par le procédé ordinaire; puis je divise le reste 64773319870 par trois fois le carré de la partie déjà trouvée à la racine, c'est-à-dire par 1890030000, plus simplement je divise 6477331 par 189003; si j'écris la partie entière 34 du quotient à la droite de 251, j'ai la racine demandée à moins d'une unité près.

En effet, soit A le nombre donné, a la partie 25100 déjà trouvée à la racine, R le reste obtenu après le calcul des trois premiers chiffres, x la seconde partie de la racine, on a

$$A=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3;$$

d'où

$$3a^2x=A-a^3-3ax^2-x^3,$$

$$x=\frac{R}{3a^2}-\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{3a^2}.$$

Le nombre x est plus petit que 100, tandis que a est plus grand que 10000 ou que 100^2; donc le second terme $\frac{x^2}{a}$ est plus petit que l'unité; on négligera le troisième terme $\frac{x^3}{3a^2}$, qui est plus petit que $\frac{100^3}{3.100^4}$ ou que $\frac{1}{300}$. Ainsi le quotient complet $\frac{R}{3a^2}$ donnera x par excès à moins d'une unité près; si l'on prend seulement la partie entière du quotient, on aura la racine à moins d'une unité près, par défaut ou par excès.

Dans l'exemple actuel, l'erreur commise $\frac{x^2}{a}$ est plus petite que $\frac{40^2}{25000}$, soit plus petite que 0,1, et l'on a la racine à moins d'un dixième près.

CHAPITRE V.

CALCULS D'APPROXIMATION.

---

359. Il arrive souvent que l'on a à effectuer des calculs sur des nombres approchés. On a vu en effet que les grandeurs incommensurables ne peuvent pas être mesurées exactement. D'ailleurs les instruments dont on se sert dans la mesure des grandeurs ne sont susceptibles que d'un certain degré de précision; les nombres obtenus doivent être regardés, non pas comme les mesures exactes des grandeurs, mais comme des évaluations plus ou moins approchées, suivant la perfection de l'instrument. Ces nombres approchés étant introduits dans les calculs, on arrive à un résultat inexact; il se présente ici deux questions: 1° Connaissant l'approximation des nombres sur lesquels on opère, quelle est l'approximation du résultat? — 2° Avec quelle approximation faut-il avoir les nombres sur lesquels on opère, pour que l'on obtienne le résultat avec une approximation donnée?

360. Ordinairement on exprime l'approximation d'un nombre décimal en disant qu'elle est moindre qu'une certaine unité décimale 10^n. Lorsqu'on connaît le sens de l'erreur, il est possible d'écrire le nombre avec n chiffres décimaux exacts. Soit le nombre 28,45732 approché par excès à moins de 0,001 près; le nombre 28,457 est aussi approché à moins de 0,001, dans un sens ou dans l'autre. Soit le nombre 28,45632 approché par défaut à moins de 0,001; le nombre 28,457 est aussi approché à moins de 0,001, dans un sens ou dans l'autre. Mais lorsqu'on ne connaît pas le sens de l'ap-

proximation, ceci n'est pas toujours possible. Si le nombre 28,45732 est approché à moins de 0,001 dans un sens inconnu, le nombre exact est compris entre 28,45632 et 28,45832; chacun des nombres 28,457 et 28,458 serait approché à moins de 2 millièmes.

On effectuera rapidement les calculs sur les nombres approchés à l'aide des procédés que nous avons expliqués dans le chapitre précédent. Mais il y a une précaution à prendre : l'approximation des nombres donnés introduit une certaine erreur dans le résultat, l'opération abrégée en occasionne une seconde; il importe que la seconde erreur n'augmente pas considérablement la première. Si la première erreur est moindre que $\frac{1}{10^n}$ et dans un sens connu, on dirigera les calculs de manière que la seconde soit aussi moindre que $\frac{1}{10^n}$ et en sens inverse; on aura ainsi le résultat à moins de $\frac{1}{10^n}$ près. Si la première erreur est moindre que $\frac{a}{10^{n+1}}$ (*a* étant un nombre d'un chiffre) et dans un sens inconnu, on dirigera les calculs de manière que la seconde erreur soit moindre que $\frac{10-a}{10^{n+1}}$; la somme des deux erreurs étant plus petite que $\frac{10}{10^{n+1}}$ ou que $\frac{1}{10^n}$, on aura encore le résultat à moins de $\frac{1}{10^n}$.

Addition.

301. Lorsqu'on fait l'addition de plusieurs nombres approchés dans le même sens, l'erreur commise sur le résultat est égale à la somme des erreurs partielles. Soit à additionner les nombres 12,457, 7,875, 0,209, 3,628 approchés par excès, chacun à moins d'un millième. L'addition donne 24,169. L'erreur commise étant moindre que 4 millièmes, la somme exacte est

comprise entre 24,165 et 24,169. On prendra 24,17 par excès, à moins d'un demi-centième près.

Mais quand on ne connaît pas le sens de l'approximation des nombres proposés, les uns étant approchés par défaut, les autres par excès, les erreurs se compensent en partie, et l'erreur commise sur le résultat est moindre que la somme des erreurs partielles. Proposons-nous d'additionner les nombres précédents approchés chacun à moins de 1 millième, mais dans un sens inconnu. Dans le cas le plus défavorable, l'erreur sera moindre que 4 millièmes; de sorte que le résultat exact est compris entre 24,165 et 24,173. On prendra 24,17 à moins d'un demi-centième près, dans un sens inconnu.

Soustraction.

362. L'erreur commise sur la différence de deux nombres approchés égale la différence ou la somme des erreurs commises sur les deux nombres, suivant que ces deux nombres sont approchés dans le même sens ou en sens contraire. Du nombre 47,259 approché par excès à moins de 1 millième, soit à retrancher le nombre 29,345 approché par défaut à moins de 1 millième, l'opération donne 17,914. Ce nombre est trop fort, et l'erreur commise est moindre que 2 millièmes. La différence exacte est donc comprise entre 27,912 et 27,914; on prendra 27,91 par défaut à moins de 1 demi-centième près. Si l'on ne connaissait pas le sens des erreurs, l'erreur commise sur le résultat étant moindre que 2 millièmes dans un sens ou dans l'autre, la différence exacte serait comprise entre 27,912 et 27,916; on prendrait 27,91 par défaut à moins de 1 centième près.

Multiplication.

Produit d'un nombre approché par un nombre exact.

363. Considérons d'abord le cas où l'on multiplie un nombre approché par un nombre exact. Il est clair que l'erreur

commise sur le résultat est égale à l'erreur commise sur le facteur approché, multipliée par le facteur exact.

Exemple I. Soit à multiplier le nombre 25,674, approché par excès à moins de 1 millième, par le nombre exact 82,167. Le multiplicateur étant moindre que 83 unités, l'erreur commise sur le produit est plus petite que 83 millièmes ou que 1 dixième. Nous calculerons le produit par la méthode abrégée à moins de 1 dixième, en plaçant sous les millièmes du multiplicande le chiffre des unités du multiplicateur.

```
 25,6740
   76128
--------
 2053920
   51348
    2567
    1536
     175
--------
 2109,546
```

Les produits partiels fournis par les trois chiffres 1, 6, 7 du multiplicateur étant seuls inexacts, la quantité négligée au produit est moindre que 1+6+7 ou que 14 millièmes. Le produit calculé exactement serait compris entre 21059,546 et 2109,560; pour avoir le produit exact, il faut en retrancher une quantité moindre que 83 millièmes; le produit exact est donc compris entre 21059,463 et 2109,560; on prendra 21059,5 à moins d'un dixième, dans un sens inconnu.

Si l'on ne connaissait pas le sens de l'erreur commise sur le multiplicande, le produit exact étant compris entre 21059,463 et 21059,643, on prendrait 21059,55 à moins d'un dixième près; le second chiffre décimal devrait être conservé, quoique inexact. Le nombre 21059,5 avec un seul chiffre décimal ne serait approché qu'à moins de 15 centièmes, ou plus simplement de 2 dixièmes.

Exemple II. Calculer la circonférence d'un cercle dont le

rayon est 5,87 à moins d'un centième près. En désignant par r le rayon et par π le rapport de la circonférence au diamètre, on sait que la circonférence est égale à $2\pi r$. On a

$$\pi = 3,1415926\ldots$$
$$2\pi = 6,2831852\ldots$$

Pour avoir la circonférence, il faut multiplier le nombre 2π par le rayon r. L'erreur commise sur le second facteur occasionne dans le produit une erreur moindre que 7 centièmes ou que 1 dixième. Si l'on effectue la multiplication par la méthode abrégée à moins de 1 dixième près, c'est-à-dire en plaçant le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre des millièmes du multiplicande, on trouve 36,873, et la partie négligée au produit est moindre que $5+8+7$, ou que 20 millièmes. Le produit calculé exactement serait donc compris entre 36,873 et 36,893. Pour avoir le produit exact, il faut ajouter ou retrancher une quantité moindre que 7 centièmes; le produit exact est donc compris entre 36,80 et 36,963. On prendra 36,9 à moins d'un dixième près.

Exemple III. Calculer, à moins d'un millimètre près, la circonférence du cercle circonscrit au carré qui a un mètre de côté.

Si l'on appelle x la longueur de la circonférence, on a $x = \pi\sqrt{2}$. L'erreur commise sur $\sqrt{2}$ étant multipliée par un nombre plus petit que 4, il suffit de calculer ce facteur à moins d'un dix-millième, ce qui donne $\sqrt{2} = 1,4143$ par excès. Faisant le produit par la méthode abrégée, à moins de 1 millième, on trouve 4,44309, et la partie négligée est moindre que 13 cent-millièmes. Le produit calculé exactement serait donc compris entre 4,4430 et 4,4433. Pour avoir le produit exact, il faut en retrancher une quantité plus petite que 4 dix-millièmes; le produit exact est donc compris entre 4,4426 et 4,4433; on prendra 4,443 à moins d'un demi-millième, par défaut ou par excès.

Produit de deux nombres approchés.

364. Considérons maintenant le produit de deux facteurs approchés. Nous examinerons différents cas, suivant que les deux facteurs sont approchés dans le même sens ou en sens contraire. Appelons a et b les valeurs exactes des deux facteurs; supposons que le facteur a soit compris entre les deux quantités a' et a'' approchées, la première par défaut, la seconde par excès; que de même le second facteur soit compris entre les deux quantités b' et b'' approchées, la première par défaut, la seconde par excès.

1° Prenons d'abord les deux valeurs a'' et b'' approchées par excès. Posons

$$a''=a+\alpha,$$
$$b''=b+\beta,$$

α et β étant les erreurs commises sur ces deux valeurs.

On a

$$a''b''=(a+\alpha)\,(b+\beta)=ab+b\alpha+a\beta+\alpha\beta,$$

d'où l'on déduit

$$a''b''-ab=b\alpha+a\beta+\alpha\beta.$$

En groupant les deux derniers termes, on peut écrire

$$a''b''-ab=b\alpha+(a+\alpha)\beta=b\alpha+a''\alpha.$$

Si l'on appelle ε la différence entre le produit exact ab et le produit approché $a''b''$, et si dans le terme $b\alpha$ on remplace le nombre b par le nombre plus grand b'', on obtient la formule

$$\varepsilon<b''\alpha+a''\beta.$$

2° Prenons maintenant les deux valeurs a' et b' approchées par défaut. Posons

$$a=a'+\alpha,$$
$$b=b'+\beta.$$

On a

$$ab=(a'+\alpha)(b'+\beta)=a'b'+b'\alpha+a'\beta+\alpha\beta,$$

d'où

$$ab - a'b' = b'\alpha + a'\beta + \alpha\beta.$$

En groupant les deux derniers termes, on peut écrire

$$ab - a'b' = b'\alpha + (a' + \alpha)\beta = b'\alpha + a\beta.$$

Si l'on désigne comme précédemment par ε la différence entre le produit exact ab et le produit approché $a'b'$, on a

$$\varepsilon < b''\alpha + a''\beta.$$

3° Prenons maintenant l'un des facteurs a'' par excès, l'autre b' par défaut. Posons

$$a'' = a + \alpha,$$
$$b = b' + \beta.$$

On a

$$a''(b' + \beta) = b(a + \alpha),$$

d'où

$$a''b' + a''\beta = ab + b\alpha.$$

On en déduit

$$a''b' - ab = b\alpha - a''\beta,$$

ou

$$ab - a''b' = a''\beta - b\alpha,$$

suivant que le produit approché $a''b'$ est plus grand ou plus petit que le produit exact ab. Dans le premier cas, l'erreur commise est moindre que la quantité $b\alpha$; dans le second cas, elle est moindre que $a''\beta$; dans les deux cas, l'erreur est moindre que la plus grande des deux quantités $b''\alpha$, $a''\beta$. On peut dire encore que l'erreur est moindre que la somme $b''\alpha + a''\beta$.

On conclut de ce qui précède que, dans tous les cas, *l'erreur commise sur le produit de deux facteurs approchés est moindre que la somme des produits que l'on obtient en multipliant l'erreur commise sur chaque facteur par l'autre facteur pris par excès.*

Carré d'un nombre approché.

365. Lorsque les deux facteurs a et b sont égaux entre eux, le produit ab devient un carré a^2, et l'erreur commise est moindre que $a''\alpha + a''\alpha$, c'est-à-dire moindre que $2a''\alpha$. Ainsi *l'erreur commise sur le carré d'un nombre approché est plus petite que deux fois l'erreur commise sur ce nombre multipliée par ce nombre lui-même pris par excès.*

Exemples.

Exemple I. Calculer le produit des deux nombres 34,258 et 21,367 approchés tous deux par excès à moins d'un millième. Ces facteurs étant respectivement moindres que 35 et 22, l'erreur commise sur le produit proposé sera plus petite que 22 millièmes, plus 35 millièmes, c'est-à-dire plus petite que 57 millièmes, ou que 1 dixième. En calculant le produit par la méthode abrégée à moins de 1 dixième, on trouve 731,983; la quantité négligée est moindre que 3+6+7 ou que 16 millièmes. Le produit, calculé exactement, est donc compris entre 731,983 et 731,999; pour avoir le produit exact, il faut retrancher une quantité moindre que 57 millièmes; il en résulte que le produit exact est compris entre 731,926 et 731,999; on prendra 731,9 par défaut à moins d'un dixième près.

Si l'on ne connaissait pas le sens de l'approximation des deux facteurs, le produit exact serait compris entre 731,926 et 732,056. On prendrait 732,0 à moins d'un dixième, par défaut ou par excès.

Exemple II. Calculer la surface du cercle dont le rayon est 5,87 à moins d'un centimètre près. La surface d'un cercle est exprimée par la formule πr^2. L'erreur commise sur le carré r^2 est moindre que 1 centième multiplié par deux fois le rayon pris par excès, c'est-à-dire moindre que 12 centièmes; dans le produit $\pi \times r^2$, l'erreur provenant du facteur r^2 sera moindre que $0,12 \times 3,2$, c'est-à-dire moindre que 0,4; on aura ainsi la surface à moins d'un mètre carré près. Il faut diriger les calculs en conséquence. En calculant r^2 par la

méthode abrégée à moins de 0,1, on trouve 34,452, et la partie négligée est moindre que 7 millièmes ; si l'on prend $r^2 = 34,45$, l'erreur provenant du calcul étant moindre que 1 centième, l'erreur totale sur r^2 sera moindre que 13 centièmes. Il en résulte sur πr^2 une erreur moindre que 0,5. En calculant le produit $\pi \times r^2$ par la méthode abrégée à moins de 1 unité, on trouve 108,18, et la quantité négligée est moindre que 3+4+4+5 ou 16 centièmes ; le produit calculé exactement serait compris entre 108,18 et 108,34 ; pour avoir le produit exact, il faut ajouter ou retrancher une quantité moindre que 0,5 ; le produit exact est donc compris entre 107,6 et 108,9 ; on prendra 108 à moins d'une unité près.

Produit de plusieurs facteurs approchés.

366. La règle que nous avons donnée pour évaluer l'erreur commise sur le produit de deux facteurs approchés peut être étendue à un nombre quelconque de facteurs. Soient a, b, c trois facteurs, a'', b'', c'' des valeurs approchées par excès, α, β, γ les erreurs commises sur ces trois facteurs, quand on les prend par défaut ou par excès. Nous avons vu que l'erreur commise sur le produit $a \times b$ est moindre que $b''\alpha + a''\beta$. De même, l'erreur commise sur le produit ab et c de deux facteurs est moindre que

$$(b''\alpha + a''\beta)\,c'' + a''b''\gamma,$$

ou que

$$b''c''\alpha + a''c''\beta + a''b''\gamma.$$

Et ainsi de suite. On en conclut que *l'erreur commise sur le produit de plusieurs facteurs approchés est moindre que la somme des produits que l'on obtient en multipliant l'erreur de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs pris par excès.*

Cube d'un nombre approché.

367. Lorsque les trois facteurs a, b, c, sont égaux, le produit abc devient le cube a^3, et l'erreur commise est moindre

que $3a''^2\alpha$. Ainsi *l'erreur commise sur le cube d'un nombre approché est moindre que l'erreur commise sur le nombre multipliée par trois fois le carré de ce nombre pris par excès.*

Division.

Quotient d'un nombre approché par un nombre exact.

368. Lorsque le dividende est approché, le diviseur exact, il est clair que l'erreur commise sur le quotient est égale à l'erreur commise sur le dividende divisée par le diviseur.

Soit par exemple à diviser le nombre 3254,6, approché à moins d'un dixième, par le nombre exact 235. L'erreur commise sur le quotient sera moindre que $\frac{0,1}{235}$, et par conséquent plus petite que 0,0005. La division donne 13,8493; le quotient exact est compris entre 13,8488 et 13,8499; on prendra 13,849 à moins d'un millième près.

Quotient d'un nombre exact par un nombre approché.

369. Considérons, en second lieu, le cas où le dividende est exact, le diviseur approché. Appelons a le dividende, b le diviseur compris entre les deux valeurs b' et b'' approchées, la première par défaut, la seconde par excès. Prenons d'abord la valeur b' approchée par défaut, et posons $b=b'+\beta$, on a

$$\frac{a}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{a\,(b-b')}{bb'}=\frac{a\beta}{bb'}<\frac{a\beta}{b'^2}.$$

Si l'on prend la valeur b'' approchée par défaut, et si l'on pose $b''=b+\beta$, on a de même

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b''}=\frac{a(b''-b)}{bb''}=\frac{a\beta}{bb''}<\frac{a\beta}{b'^2}.$$

Ainsi, dans tous les cas, *l'erreur commise sur le quotient d'un nombre exact par un nombre approché est moindre que l'erreur du diviseur multipliée par le dividende et divisée par le carré du diviseur pris par défaut.*

Soit par exemple à diviser le nombre exact 46,853 par le nombre 5,3672 approché par excès à moins d'un dix-millième. L'erreur commise sur le quotient est moindre que $\frac{0,0001 \times 47}{25}$, et par conséquent moindre que 0,0002. On calculera donc le quotient à moins de 1 millième; la question revient à calculer à moins d'une unité le quotient de 46853 par 5,3672.

```
4 6 8 5 3,0 | 5,3 6̇ 7̇ 2̇
  3 9 1 5 4 |--------
    1 5 8 5 |  8 7 2 9
      5 1 3
        3 6
```

En opérant par la méthode abrégée, on trouve le quotient entier 8729; tenant compte du reste, nous ajouterons à ce nombre la fraction $\frac{3,6}{5,3672} = 0,6...$, ce qui donne le nombre décimal approché 8729,6... La partie négligée au produit du diviseur par le quotient est moindre que (7+2+9) ou que 18 dixièmes; il faut donc retrancher du quotient une fraction moindre que $\frac{1,8}{5}$, et par conséquent moindre que 0,4. D'autre part, le divieur étant approché par excès, il faut ajouter une quantité moindre que 0,2. Le quotient exact sera donc compris entre 8729,2 et 8729,9. On prendra 8729 par défaut à moins d'une unité. Le quotient cherché est 8,729 par défaut à moins de 1 millième.

Quotient de deux nombres approchés.

370. Évaluons maintenant l'erreur commise sur le quotient de deux nombres approchés. Le dividende a est compris entre les deux valeurs a' et a'' approchées, la première par défaut, la seconde par excès. Le diviseur b est lui-même compris entre b' et b''. Nous examinerons différents cas, suivant que le

dividende et le diviseur sont approchés dans le même sens ou en sens contraires.

1° Prenons d'abord le dividende a'' par excès, le diviseur b' par défaut, on a

$$\frac{a''}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{ba''-ab'}{bb'}=\frac{b(a+\alpha)-a(b-\beta)}{bb'}=\frac{b\alpha+a\beta}{bb'}=\frac{\alpha}{b'}+\frac{a\beta}{bb'};$$

d'où l'on déduit, en désignant par ε l'erreur commise sur le quotient

$$\varepsilon<\frac{\alpha}{b'}+\frac{a''\beta}{b'^2}$$

2° Si l'on prend le dividende a' par défaut, le diviseur b'' par excès, on a de même

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b''}=\frac{ab''-ba'}{bb''}=\frac{a(b+\beta)-b(a-\alpha)}{bb''}=\frac{a\beta+b\alpha}{bb''}=\frac{\alpha}{b''}+\frac{a\beta}{bb''};$$

d'où

$$\varepsilon<\frac{\alpha}{b'}+\frac{a''\beta}{b'^2}.$$

3° En prenant le dividende et le diviseur par excès, on a

$$\frac{a''}{b''}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{b''}-\frac{a\beta}{bb''},$$

ou

$$\frac{a}{b}-\frac{a''}{b''}=\frac{a\beta}{bb''}-\frac{\alpha}{b''},$$

suivant que le quotient approché est plus grand ou plus petit que le quotient exact.

4° En prenant le dividende et le diviseur par défaut, on a de même

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha}{b'}-\frac{a\beta}{bb'},$$

ou

$$\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{a\beta}{bb'}-\frac{\alpha}{b'}.$$

Ainsi, quand on prend les nombres en sens contraire, l'erreur commise sur le quotient est plus petite que la somme des

deux quantités $\frac{\alpha}{b'}$, $\frac{a''\beta}{b'^2}$; quand on les prend dans le même sens, l'erreur est plus petite que la plus grande de ces deux quantités. Dans tous les cas, l'erreur est plus petite que leur somme.

Cherchons, par exemple, le quotient du nombre 2,648, approché par excès à moins de 1 millième par le nombre, 1,245, approché par défaut aussi à moins de 1 millième. L'erreur commise sur le quotient est plus petite que $\frac{0,001}{1}+\frac{3\times 0,001}{1}$ ou que 0,004. Le quotient calculé est 2,126 et une fraction de millième; il faut en retrancher une quantité moindre que 0,004; le quotient exact est donc compris entre 2,122 et 2,127; on prendra 2,12 par défaut à moins d'un centième près.

Racine carrée.

371. On demande la racine carrée d'un nombre a compris entre les deux valeurs a' et a'' approchées, la première par défaut, la seconde par excès. On a

$$\sqrt{a}-\sqrt{a'}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a'})(\sqrt{a}+\sqrt{a'})}{\sqrt{a}+\sqrt{a'}}=\frac{a-a'}{\sqrt{a}+\sqrt{a'}},$$

ou

$$\sqrt{a''}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a''}-\sqrt{a})(\sqrt{a''}+\sqrt{a})}{\sqrt{a''}+\sqrt{a}}=\frac{a'-a}{\sqrt{a}+\sqrt{a''}},$$

suivant que l'on prend la valeur approchée par défaut ou la valeur approchée par excès. Dans tous les cas, en désignant par α l'erreur commise sur le nombre proposé et par ε l'erreur commise sur la racine, on a

$$\varepsilon<\frac{\alpha}{2\sqrt{a'}}.$$

Ainsi *l'erreur commise sur la racine carrée d'un nombre approché est plus petite que l'erreur commise sur ce nombre, divisée par deux fois la racine carrée de ce nombre pris par défaut.*

Exemples.

Exemple I. Extraire la racine carrée du nombre 232,48 approché par défaut à moins de 1 centième près. L'erreur commise sur la racine sera plus petite que $\frac{0,01}{2\sqrt{232}}$, et par conséquent plus petite que $\frac{0,01}{2\times10}$ ou que 0,0005.

La racine calculée par le procédé ordinaire est 15,2472... Il faut y ajouter une quantité plus petite que 0,0005; la racine exacte est donc comprise entre 15,2472 et 15,2478. On prendra 15,247 par défaut à moins de 1 millième près.

Exemple II. Calculer à moins de 1 millième près la racine quatrième du nombre 15943286. On sait que

$$\sqrt[4]{15943286}=\sqrt{\sqrt{15943286}}.$$

Cherchons d'abord avec quelle approximation il faut calculer la première racine carrée pour avoir la seconde à moins de 0,001. La première racine est plus grande que 3000, la seconde plus grande que 50. Si donc on appelle α l'erreur commise sur la première racine, l'erreur commise sur la seconde sera moindre que $\frac{\alpha}{2\times50}$ ou que $\frac{\alpha}{100}$; il suffira donc de calculer la première racine à moins de 1 dixième près. En extrayant la première racine, on trouve 3992,9 par défaut à moins de 1 dixième; en extrayant la seconde on trouve 63,190 par excès. Pour avoir le résultat exact, il faut augmenter et diminuer ce nombre d'une quantité moindre que un millième; on prendra donc 63,190 à moins de 1 millième près.

Exemple III. Calculer à moins de 1 millième près le rayon du cercle dont la surface est de 254 mètres carrés.

Le rayon cherché est donné par la formule

$$r=\sqrt{\frac{254}{\pi}}.$$

Le quotient est plus grand que 60 et le rayon plus grand

que 7; si l'on appelle α l'erreur commise sur le quotient, l'erreur commise sur la racine sera moindre que $\frac{\alpha}{2\times 7}$ ou que $\frac{\alpha}{10}$. Pour avoir la racine à moins de 1 millième, il suffit donc de calculer le quotient à moins de 1 centième. Le quotient est 80,85 par défaut à moins de 1 centième près; la racine carrée de ce nombre est 8,992 par excès. Comme il faut augmenter ou diminuer ce nombre d'une quantité moindre que 1 millième, on prendra 8,992 à moins d'un millième par défaut ou par excès.

Racine cubique.

372. Nous nous servirons ici de l'égalité

$$(a^3-b^3)=(a^2+ab+b^2)(a-b),$$

que l'on vérifiera aisément en effectuant la multiplication; on en déduit

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}.$$

Dans cette égalité remplaçons a et b par $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a'}$; il vient

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a'}=\frac{a-a'}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a'}+(\sqrt[3]{a'})^2}.$$

On a de même

$$\sqrt[3]{a''}-\sqrt[3]{a}=\frac{a''-a}{(\sqrt[3]{a''})^2+\sqrt[3]{a''}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2}.$$

Si donc on appelle α l'erreur commise sur le nombre approché et ε l'erreur commise sur la racine cubique, on a, dans tous les cas,

$$\varepsilon<\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a'})^2}.$$

L'erreur commise sur la racine cubique d'un nombre approché est plus petite que l'erreur commise sur le nombre divisée par trois fois le carré de la racine cubique de ce nombre pris par défaut.

Erreurs relatives.

373. L'erreur *absolue* commise sur un nombre est ce qu'il faudrait y ajouter ou en retrancher pour avoir le nombre exact.

L'erreur *relative* est l'erreur absolue divisée par le nombre lui-même.

Supposons, par exemple, que, sur une longueur de 1000 mètres, on commette une erreur de 1 mètre; en imaginant cette erreur de 1 mètre répartie uniformément sur les 1000 mètres, c'est 1 millimètre par mètre, ce qu'on exprime en disant que l'erreur relative est $\frac{1}{1000}$.

Supposons maintenant que, sur une longueur de 2000 mètres, on commette une erreur de 2 mètres; l'erreur, répartie uniformément, ne sera encore que de 1 millimètre par mètre, ce qui constitue la même erreur relative $\frac{1}{1000}$. Sur une longueur double on a commis une erreur absolue double; mais l'erreur relative n'a pas changé. De même si, sur une longueur triple, on commet une erreur absolue trois fois plus grande, l'erreur relative reste encore la même.

C'est par l'erreur relative qu'il faut juger du degré d'approximation avec lequel on mesure les grandeurs. Il est clair en effet qu'une erreur de 1 décimètre sur une grande longueur, comme la distance de deux villes, est tout à fait négligeable, tandis qu'elle est très-sensible sur une petite longueur, comme celle d'une table. Si, par exemple, on a commis une erreur de 1 mètre sur une longueur de 100 mètres, et une erreur de 10 mètres sur une longueur de 10000 mètres, on doit regarder la seconde mesure comme plus exacte que la première, quoique l'erreur absolue soit plus grande. Car, dans le premier cas, l'erreur est de 1 centimètre par mètre, tandis que, dans le second cas, elle n'est que de 1 millimètre par mètre.

374. Il existe une relation très-simple entre l'erreur relative d'un nombre approché et le nombre des chiffres exacts qui le composent. Soit le nombre 62,85 approché à moins d'un

centième, et par conséquent formé de *quatre* chiffres exacts. Si nous déplaçons la virgule de manière à n'avoir qu'un chiffre à la partie entière, nous aurons le nombre 6,285 approché à moins d'un millième.

L'erreur absolue est ici moindre que $\frac{1}{10^3}$ et l'erreur relative moindre que $\frac{1}{6 \times 10^3}$, puisque le nombre est plus grand que 6. On dira plus simplement que l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{10^3}$, c'est-à-dire qu'une unité décimale du *troisième* ordre.

De même, soit le nombre 0,267435 approché à moins de 1 millionième, et par conséquent formé de *six* chiffres exacts. En déplaçant la virgule on a le nombre 2,67435 approché à moins de $\frac{1}{10^5}$. L'erreur relative est ici plus petite que $\frac{1}{2 \times 10^5}$; on dira plus simplement qu'elle est plus petite que $\frac{1}{10^5}$, c'est-à-dire qu'une unité décimale du *cinquième* ordre.

En général, si le nombre contient n chiffres exacts, et si l'on désigne par k le premier chiffre de gauche, on verra que l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{k \times 10^{n-1}}$. On dira plus simplement qu'elle est moindre que $\frac{1}{10^{n-1}}$. Ainsi, *l'erreur relative est toujours moindre qu'une unité décimale de l'ordre marqué par le nombre des chiffres exacts moins un.*

375. La considération des erreurs relatives permet d'énoncer d'une manière approximative et rapide l'erreur commise dans le résultat d'opérations effectuées sur des nombres approchés.

Soient a et b les valeurs exactes des deux facteurs d'un produit; appelons $a + \alpha$ et $b + \beta$ les valeurs approchées, les quantités α et β étant positives ou négatives, suivant que les facteurs sont approchés par excès ou par défaut. On a d'une manière générale

$$(a+\alpha)(b+\beta)=ab+b\alpha+a\beta+\alpha\beta;$$

la différence entre le produit approché $(a+\alpha)(b+\beta)$ et le produit exact ab est donc

$$b\alpha+a\beta+\alpha\beta.$$

Si l'on néglige le terme $\alpha\beta$ qui est très-petit par rapport à chacun des deux autres, cette différence sera à peu près égale à

$$b\alpha+a\beta.$$

Divisons maintenant cette différence par le produit exact ab pour avoir l'erreur relative ; nous aurons

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}.$$

Ainsi, *l'erreur relative d'un produit de deux facteurs approchés est sensiblement égale à la somme des erreurs relatives des deux facteurs.*

Si les deux facteurs étaient approchés, l'un par défaut, l'autre par excès, l'erreur relative du produit serait sensiblement égale à la différence des erreurs relatives des facteurs.

Cette proposition peut être étendue évidemment au produit d'un nombre quelconque de facteurs approchés; car, en multipliant par un nouveau facteur, on ajoute l'erreur relative de ce facteur.

Le carré étant le produit de deux facteurs égaux, on en déduit que *l'erreur relative du carré d'un nombre approché est sensiblement égale à deux fois l'erreur de ce nombre.*

De même, *l'erreur relative du cube d'un nombre approché est sensiblement égale à trois fois l'erreur relative de ce nombre.*

376. Si l'on considère le dividende comme le produit du diviseur par le quotient, on voit que l'erreur relative du dividende est sensiblement égale à l'erreur relative du diviseur augmentée ou diminuée de celle du quotient. Il en résulte que l'erreur relative du quotient est sensiblement égale à l'erreur relative du dividende, diminuée ou augmentée de celle du diviseur, suivant que les deux nombres sont approchés dans le même sens ou en sens contraires. En se plaçant dans le cas le

plus défavorable, on évaluera *l'erreur relative du quotient en prenant la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

L'erreur relative du carré d'un nombre approché étant sensiblement égale au double de l'erreur relative du nombre lui-même, il en résulte que *l'erreur relative de la racine carrée d'un nombre approché est sensiblement égale à la moitié de l'erreur relative du nombre.*

De même, *l'erreur relative de la racine cubique d'un nombre approché est sensiblement égale au tiers de l'erreur relative du nombre.*

Voici deux exemples qui feront comprendre l'utilité de ces propositions sur les erreurs relatives.

EXEMPLE I. Calculer $\sqrt{(1+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-2)}$ avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10000}$ ou que $\frac{1}{10^4}$.

Il s'agit d'effectuer le produit des deux facteurs approchés $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}-2$ et d'extraire la racine carrée de ce produit. Si l'on calcule chaque facteur avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10^4}$, l'erreur relative du produit sera moindre que $\frac{2}{10^4}$; celle de la racine deux fois plus petite, soit $\frac{1}{10^4}$. Il suffit donc de calculer chaque facteur avec cinq chiffres exacts.

$$\sqrt{2}=1,4142 \qquad 1+\sqrt{2}=2,4142$$

$$\sqrt{5}=2,23607 \qquad \sqrt{5}-2=0,23607$$

$$(1+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-2)=0,50992$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-2)}=0,75493.$$

EXEMPLE II. Calculer $\frac{(1+\sqrt{2})\times(3-\sqrt{\sqrt{2}})\times(15-\sqrt{3})}{(120+\sqrt{7})\times(3+\sqrt{5})}$ avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10^2}$.

Il entre dans le calcul cinq facteurs approchés, et l'on sait

que l'erreur relative du résultat, dans le cas le plus défavorable, celui où toutes les erreurs s'ajoutent, est sensiblement égal à la somme des cinq erreurs relatives. Si l'on obtient chaque facteur avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10^4}$, on aura le résultat avec une erreur relative moindre que $\frac{5}{10^4}$, et par conséquent moindre que $\frac{1}{10^3}$. On calculera donc chaque facteur avec quatre chiffres exacts.

$$\sqrt{2} = 1,414 \qquad 1 + \sqrt{2} = 2,414$$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = 1,189 \qquad 3 - \sqrt{\sqrt{2}} = 1,811$$

$$\sqrt{3} = 1,73 \qquad 15 - \sqrt{3} = 13,27$$

$$\sqrt{7} = 2,6 \qquad 120 + \sqrt{7} = 122,6$$

$$\sqrt{5} = 2,236 \qquad 3 + \sqrt{5} = 5,236$$

$$(1 + \sqrt{2}) \times (3 - \sqrt{\sqrt{2}}) = 4,372$$

$$(1 + \sqrt{2}) \times (3 - \sqrt{\sqrt{2}}) \times (15 - \sqrt{3}) = 58,01$$

$$(120 + \sqrt{7}) \times (3 + \sqrt{5}) = 641,9$$

$$\frac{(1 + \sqrt{2}) \times (3 - \sqrt{\sqrt{2}}) \times (15 - \sqrt{3})}{(120 + \sqrt{7}) \times (3 + \sqrt{5})} = 0,0904.$$

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

Des quatre Opérations.

LIVRE II.

Propriétés des Nombres.

LIVRE III.

Des Fractions.

DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE IV.

Puissances et Racines.

LIVRE V.

Proportions et Progressions.

LIVRE VI.

Des Logarithmes.

LIVRE VII.

Complément.



